

# 复杂信任网络群组综合评价方法及应用研究

曾守楨<sup>1</sup>, 顾佳星<sup>1</sup>, 叶军<sup>2</sup>

(1. 宁波大学商学院, 浙江宁波 315211; 2. 宁波大学土木工程与地理环境学院, 浙江宁波 315211)

**摘要:** 考虑评价环境的复杂不确定性、评价专家的信任行为特征以及群组专家的共识等问题, 提出了一种区间 Fermatean 模糊信任网络群组综合评价方法。首先, 针对区间 Fermatean 模糊评价信息的集成问题, 提出了区间 Fermatean 模糊信息的运算规则, 并在此基础上提出了一种区间 Fermatean 模糊 Frank 集成方法。其次, 考虑到评价专家间信任关系对专家权重和共识达成的影响, 构建了基于语言术语的信任网络以计算专家权重, 同时设计了个性化反馈机制, 进而构建了信任共识交互模型以提高群组共识度。此外, 针对评价指标权重未知的情形, 提出了区间 Fermatean 模糊熵权法获取指标权重。最后, 通过高校商科类本科生统计设计能力的评价问题验证所提出方法的可行性和优越性。

**关键词:** 区间 Fermatean 模糊集; Frank 算子; 信任关系; 群组评价; 统计设计能力

**中图分类号:** C934 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-2154(2022)11-0084-17

**DOI:** 10.14134/j.cnki.cn33-1336/f.2022.11.007

## Research on Group Comprehensive Evaluation Method of Complex Trust Network and Its Application

ZENG Shouzhen<sup>1</sup>, GU Jiaying<sup>1</sup>, YE Jun<sup>2</sup>

(1. School of Business, Ningbo University, Ningbo 315211, China;

2. School of Civil & Environmental Engineering and Geography Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

**Abstract:** Considering the complex uncertainty of the existing evaluation environment, the trust behavior characteristics among evaluation experts and the consensus of group experts, a group comprehensive evaluation method based on interval Fermatean fuzzy trust network is proposed. Firstly, aiming at the integration of interval Fermatean fuzzy evaluation information, the operation rules of interval Fermatean fuzzy information are proposed, and on the basis of which, an interval Fermatean fuzzy Frank integration method is proposed. Secondly, considering the influence of the trust relationship between evaluation experts on expert weights and consensus, a trust network based on language terms is constructed to calculate expert weights. At the same time, a personalized feedback mechanism is designed, and then a trust consensus interaction model is constructed to improve the group consensus. In addition, for the case of unknown evaluation index weight, an interval Fermatean fuzzy entropy weight method is proposed to obtain the index weight. Finally, the feasibility and superiority of the proposed method are verified by the evaluation of the statistical design ability of business undergraduates in universities.

**Key words:** interval Fermatean fuzzy set; Frank operator; trust relationship; group evaluation; statistical design ability

**收稿日期:** 2022-04-01

**基金项目:** 国家社会科学基金重点项目“基于信任关系的群体评价共识机制研究”(22ATJ003); 浙江省哲学社会科学领军人才培养重大项目“基于非确定性数据的综合评价方法研究”(21QNYC11ZD); 全国统计科研重点项目“基于社会网络的综合评价技术及智能应用”(2021LZ33); 宁波大学教学改革重点项目“商科类本科生的统计设计能力培养研究”(JYXMXZD2022002)

**作者简介:** 曾守楨(通讯作者), 男, 教授, 博士生导师, 经济学博士, 主要从事统计评价与决策分析研究; 顾佳星, 男, 硕士研究生, 主要从事统计与数量经济研究; 叶军, 男, 教授, 博士生导师, 主要从事管理评价、系统建模与优化研究。

## 一、引言

现实生活中,因评价对象涉及专业面广、领域复杂,仅由单个个体做出的评价主观性较强,评价结果往往过于片面,无法充分挖掘和体现评价对象的内在特征。因此,需要由多评价个体组成的群组对目标对象进行综合评估以体现群组智慧,进而获取更优更合理的评估方案。目前,学界对群组综合评价方法进行了较为广泛的研究,主要针对评价信息的表达方式、信息集成方法、群组评价技术等问题展开研究,具体如下:

关于评价信息表达方式的研究,学者 Zadeh(1965)<sup>[1]</sup>提出了模糊集(Fuzzy Set, FS)的概念,它是由精确数学到模糊数学的重大突破,克服了传统数学理论只有“非此即彼”两种状态的缺陷,是处理复杂评价与决策环境中不确定性和模糊性的重要工具。考虑到 FS 通过隶属度仅描述事物的支持和反对两种情形,无法体现出中立的情况,Atanassov(1986)<sup>[2]</sup>提出了直觉模糊集(Intuitionistic Fuzzy Set, IFS)的概念,通过隶属度  $\mu$ 、非隶属度  $\nu$  和犹豫度  $\pi$  等三要素刻画模糊性特征,同时反映了支持、反对和中立三种情形。但是随着评价与决策环境越发复杂,IFS 在约束条件( $0 \leq \mu + \nu \leq 1$ )下往往无法全面测度和表达不确定信息。于是, Yager(2014)<sup>[3]</sup>以及 Senapati 和 Yager(2019)<sup>[4]</sup>相继提出了毕达哥拉斯模糊集(Pythagorean Fuzzy Set, PFS)和 Fermatean 模糊集(Fermatean Fuzzy Set, FFS)的概念,其中, PFS 和 FFS 的隶属度  $\mu$  与非隶属度  $\nu$  分别满足约束条件: $0 \leq \mu^2 + \nu^2 \leq 1$ 和 $0 \leq \mu^3 + \nu^3 \leq 1$ 。相较于 IFS 和 PFS, FFS 的表达范围更为广泛、表达模糊信息的能力更强。考虑到实际复杂的评价环境,专家有时无法准确给出相应的隶属度和非隶属度值,往往用一个区间来表示,因此学者 Jeevaraj(2021)提出区间 Fermatean 模糊集(Interval-valued Fermatean Fuzzy Set, IVFFS)的概念<sup>[5]</sup>,其为评价专家对不确定信息的测度提供了极大的便利。

目前, IFS 和 PFS 等集成方法的研究得到广大学者的关注,研究成果也颇为丰富<sup>[6-12]</sup>。由于 FFS 比 IFS 和 PFS 在表达范围和能力上更具优势,因此关于 FFS 集成方法的研究也日趋丰富,如 Senapati 和 Yager(2019)<sup>[4]</sup>提出了 Fermatean 模糊加权(幂)平均/几何集成算子; Rani 和 Mishra(2021)<sup>[13]</sup>提出了一系列 Fermatean 模糊 Einstein 集成算子,包括 Fermatean 模糊 Einstein(有序)加权平均/几何算子; Tan 等(2022)<sup>[14]</sup>进一步提出了基于 Frank 的 Fermatean 模糊加权集成算子。由于 IVFFS 理论是 2021 年提出的相对比较新的模糊测度方法,因此关于 IVFFS 集成方法的研究并不多见,目前仅发现 Rani 和 Mishra(2022)<sup>[15]</sup>提出的区间 Fermatean 模糊加权平均和几何集成两种集成算子。

关于群组综合评价理论的研究,一个新的研究趋势是与社会网络理论的结合,主要是考虑社会网络中专家个体间的信任关系对专家权重与共识达成的影响。文献<sup>[16-23]</sup>提出了基于专家间的网络信任大小来获取专家权重的方法,专家的信任度越高,相应的权重越大。关于共识达成与反馈机制的研究,如 Wu 等(2017)<sup>[16]</sup>提出一种基于信任的建议生成机制,旨在根据群组综合评价意见对未达成共识的专家意见进行调整; Tian 等(2018)<sup>[20]</sup>提出一种双重反馈机制对未达成共识的专家进行意见和权重的双重修改; Wu 等(2015)<sup>[17]</sup>提出一种反馈推荐机制以提高群组共识度,其中专家意见向群组综合评价意见或其余专家综合评价意见方向调整; Liu 等(2017)<sup>[24]</sup>提出一种信任诱导推荐机制,其中由共识度构造专家间的信任关系,进而根据信任关系调整未达成共识的专家意见。

上述关于区间 Fermatean 模糊集成和群组评价的研究存在以下两个方面的缺陷:(1) 现有区间 Fermatean 模糊信息集成的研究比较匮乏,已有的加权和几何集成方法缺乏灵活性,无法满足更为复杂评价问题的需要;(2) 群组评价专家间的社会网络信任关系对评价共识和评价结果具有重要影响,但目前未见考虑网络信任的区间 Fermatean 模糊群组评价相关研究;(3) 现有关于专家意见反馈机制的研究虽然结合了信任关系特征,但主要侧重将未达成共识专家的评价意见向群组综合评价意见方向调整,并未真正发挥信任关系在意见反馈机制中的作用,没有考虑评价专家对反馈意见的接受意愿。事实上,专家更愿意相信其信任的专家的评价意见。少数文献有基于信任关系的专家意见调整研究,但忽略了未达成共识的专家对其他专家信任程度的差异化问题。

综上,为改进现有研究的缺陷,丰富模糊群组评价理论,本文提出一种基于区间 Fermatean 模糊信息的信任网络群组综合评价方法。具体而言,首先提出了一种基于 Frank 方法的区间 Fermatean 模糊集成技术,弥补了现有方法无法体现灵活性特征的不足;设计了专家个性化意见反馈机制,在此基础上进一步提出信任共识交互模型,弥补了专家意见反馈阶段信任关系的作用无法真正体现的缺陷,同时权衡了专家对反馈意见的接受意愿。此外,分别设计了基于信任水平和熵权法的专家权重和指标权重确认方法。

## 二、预备知识

本节简要回顾 FFS、IVFFS 和 Frank 算子的相关理论知识,同时定义了 IVFFS 的得分函数、精确函数以及距离测度。

**定义1** 设  $\mathfrak{S} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$  为一论域,则定义在  $\mathfrak{S}$  上的一个 FFS 可表示为:

$$F = \{ \langle Y, \mu_F(Y), \nu_F(Y) \rangle \mid Y \in \mathfrak{S} \} \quad (1)$$

其中,  $\mu_F: Y \rightarrow [0, 1]$ ,  $\nu_F: Y \rightarrow [0, 1]$ ,  $\mu_F(Y)$  和  $\nu_F(Y)$  分别表示元素  $Y$  属于集合  $F$  的隶属度和非隶属度,且满足条件  $(\mu_F(Y))^3 + (\nu_F(Y))^3 \leq 1$ ,  $0 \leq \mu_F(Y) \leq 1$ ,  $0 \leq \nu_F(Y) \leq 1$ 。犹豫度或不确定度表示为  $\pi_F(Y) = \sqrt[3]{1 - (\mu_F(Y))^3 - (\nu_F(Y))^3}$ 。为了便于应用,Senapati 和 Yager(2019)将  $F = \langle \mu_F, \nu_F \rangle$  称为一个 Fermatean 模糊数<sup>[4]</sup>。

**定义2** 设  $\mathfrak{S} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$  为一论域,则定义在  $\mathfrak{S}$  上的一个 IVFFS 可表示成式(1)的形式,其中  $\mu_F: Y \rightarrow \text{Int}[0, 1]$ ,  $\nu_F: Y \rightarrow \text{Int}[0, 1]$ ,  $\mu_F(Y)$  和  $\nu_F(Y)$  分别表示元素  $Y$  属于集合  $F$  的隶属度和非隶属度,且满足条件  $\sup_Y (\mu_F(Y))^3 + \sup_Y (\nu_F(Y))^3 \leq 1$ 。由于  $\mu_F(Y)$  和  $\nu_F(Y)$  为  $[0, 1]$  上的子区间,故可表示成上下界的形式,即  $\mu_F(Y) = [\mu_{F_L}(Y), \mu_{F_U}(Y)]$ ,  $\nu_F(Y) = [\nu_{F_L}(Y), \nu_{F_U}(Y)]$ 。因此,IVFFS 又可表示为:

$$F = \{ \langle Y, [\mu_{F_L}(Y), \mu_{F_U}(Y)], [\nu_{F_L}(Y), \nu_{F_U}(Y)] \rangle \mid Y \in \mathfrak{S} \} \quad (2)$$

其中,  $(\mu_{F_U}(Y))^3 + (\nu_{F_U}(Y))^3 \leq 1$ , 且犹豫度  $\pi_F(Y) = [\pi_{F_L}(Y), \pi_{F_U}(Y)] = [\sqrt[3]{1 - (\mu_{F_U}(Y))^3 - (\nu_{F_U}(Y))^3}, \sqrt[3]{1 - (\mu_{F_L}(Y))^3 - (\nu_{F_L}(Y))^3}]$ 。为了便于计算,Jeevaraj(2021)<sup>[5]</sup>将  $F = \langle [\mu_{F_L}, \mu_{F_U}], [\nu_{F_L}, \nu_{F_U}] \rangle$  称为一个区间值 Fermatean 模糊数(Interval-valued Fermatean fuzzy number, IVFFN)。显然,当  $\mu_{F_L} = \mu_{F_U}$  且  $\nu_{F_L} = \nu_{F_U}$  时,IVFFN 退化成为 Fermatean 模糊数。

为比较区间 Fermatean 模糊数的大小,本文定义如下的得分函数和精确函数:

**定义3** 设  $F = \langle [\mu_{F_L}, \mu_{F_U}], [\nu_{F_L}, \nu_{F_U}] \rangle$  为一个 IVFFN,则其得分函数定义为:

$$S(F) = \frac{2 + \mu_{F_L}^3 + \mu_{F_U}^3 - \nu_{F_L}^3 - \nu_{F_U}^3}{4} \in [0, 1] \quad (3)$$

精确函数定义为:

$$H(F) = \frac{\mu_{F_L}^3 + \mu_{F_U}^3 + \nu_{F_L}^3 + \nu_{F_U}^3}{2} \in [0, 1] \quad (4)$$

则对于任意两个区间 Fermatean 模糊数  $F_1$  和  $F_2$ ,有

(1) 若  $S(F_1) > S(F_2)$ , 则  $F_1 > F_2$ ;

(2) 若  $S(F_1) = S(F_2)$ , 则

1) 若  $H(F_1) > H(F_2)$ , 则  $F_1 > F_2$ ;

2) 若  $H(F_1) = H(F_2)$ , 则  $F_1 = F_2$ 。

**定义4** 对区间 Fermatean 模糊数  $F_1 = \langle [\mu_{F_{L1}}, \mu_{F_{U1}}], [\nu_{F_{L1}}, \nu_{F_{U1}}] \rangle$  和  $F_2 = \langle [\mu_{F_{L2}}, \mu_{F_{U2}}], [\nu_{F_{L2}}, \nu_{F_{U2}}] \rangle$ , 它们间的距离测度定义为:

$$d(F_1, F_2) = \frac{1}{4} [ |\mu_{F_{L1}}^3 - \mu_{F_{L2}}^3| + |\mu_{F_{U1}}^3 - \mu_{F_{U2}}^3| + |\nu_{F_{L1}}^3 - \nu_{F_{L2}}^3| + |\nu_{F_{U1}}^3 - \nu_{F_{U2}}^3| + |\pi_{F_{L1}}^3 - \pi_{F_{L2}}^3| + |\pi_{F_{U1}}^3 - \pi_{F_{U2}}^3| ] \quad (5)$$

定义5 Frank T-模和 Frank S-模函数的定义如下:

$$T_\gamma(x, y) = \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^x - 1)(\gamma^y - 1)}{\gamma - 1} \right), x, y \in [0, 1], \gamma \in (1, +\infty) \quad (6)$$

$$S_\gamma(x, y) = 1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-x} - 1)(\gamma^{1-y} - 1)}{\gamma - 1} \right), x, y \in [0, 1], \gamma \in (1, +\infty) \quad (7)$$

Frank T-模和 S-模的两大优点: 一是 Frank T-模和 S-模具有一般 T-模和 S-模的特性, 二是公式中含有参数  $\gamma$ , 因此在决策过程中专家可根据实际问题的需要选取适当的参数值。

### 三、区间值 Fermatean 模糊 Frank 集成算子

#### (一) 区间值 Fermatean 模糊 Frank 运算法则

基于定义5中的 Frank 函数, 下面我们提出区间值 Fermatean 模糊的 Frank 运算法则。

定义6 设  $F = \langle [\mu_{F_L}, \mu_{F_U}], [\nu_{F_L}, \nu_{F_U}] \rangle$  和  $F_i = \langle [\mu_{F_{L_i}}, \mu_{F_{U_i}}], [\nu_{F_{L_i}}, \nu_{F_{U_i}}] \rangle (i = 1, 2)$  为三个区间 Fermatean 模糊数, 则有:

(1)

$$F_1 \oplus F_2 = \left\langle \left[ \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-\mu_{F_{L_1}}} - 1)(\gamma^{1-\mu_{F_{L_2}}} - 1)}{\gamma - 1} \right)}, \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-\mu_{F_{U_1}}} - 1)(\gamma^{1-\mu_{F_{U_2}}} - 1)}{\gamma - 1} \right)} \right], \left[ \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{\nu_{F_{L_1}}} - 1)(\gamma^{\nu_{F_{L_2}}} - 1)}{\gamma - 1} \right)}, \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{\nu_{F_{U_1}}} - 1)(\gamma^{\nu_{F_{U_2}}} - 1)}{\gamma - 1} \right)} \right] \right\rangle;$$

(2)

$$F_1 \otimes F_2 = \left\langle \left[ \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{\mu_{F_{L_1}}} - 1)(\gamma^{\mu_{F_{L_2}}} - 1)}{\gamma - 1} \right)}, \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{\mu_{F_{U_1}}} - 1)(\gamma^{\mu_{F_{U_2}}} - 1)}{\gamma - 1} \right)} \right], \left[ \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-\nu_{F_{L_1}}} - 1)(\gamma^{1-\nu_{F_{L_2}}} - 1)}{\gamma - 1} \right)}, \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-\nu_{F_{U_1}}} - 1)(\gamma^{1-\nu_{F_{U_2}}} - 1)}{\gamma - 1} \right)} \right] \right\rangle;$$

$$(3) \lambda F = \left\langle \left[ \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-\mu_{F_L}} - 1)^\lambda}{(\gamma - 1)\lambda - 1} \right)}, \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-\mu_{F_U}} - 1)^\lambda}{(\gamma - 1)\lambda - 1} \right)} \right], \left[ \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{\nu_{F_L}} - 1)^\lambda}{(\gamma - 1)\lambda - 1} \right)}, \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{\nu_{F_U}} - 1)^\lambda}{(\gamma - 1)\lambda - 1} \right)} \right] \right\rangle, \lambda > 0;$$

$$(4) F^\lambda = \left\langle \left[ \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{\mu_{F_L}} - 1)^\lambda}{(\gamma - 1)\lambda - 1} \right)}, \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{\mu_{F_U}} - 1)^\lambda}{(\gamma - 1)\lambda - 1} \right)} \right], \left[ \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-\nu_{F_L}} - 1)^\lambda}{(\gamma - 1)\lambda - 1} \right)}, \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-\nu_{F_U}} - 1)^\lambda}{(\gamma - 1)\lambda - 1} \right)} \right] \right\rangle, \lambda > 0.$$

定义7 设  $F_i = \langle [\mu_{F_{L_i}}, \mu_{F_{U_i}}], [\nu_{F_{L_i}}, \nu_{F_{U_i}}] \rangle (i = 1, 2)$  为任意两个区间 Fermatean 模糊数, 且  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ , 则有如下性质:

- (1)  $F_1 \oplus F_2 = F_2 \oplus F_1$ ;
- (2)  $F_1 \otimes F_2 = F_2 \otimes F_1$ ;
- (3)  $\lambda(F_1 \oplus F_2) = \lambda F_1 \oplus \lambda F_2$ ;
- (4)  $\lambda_1 F_1 \oplus \lambda_2 F_1 = (\lambda_1 + \lambda_2) F_1$ ;
- (5)  $F_1^\lambda \otimes F_2^\lambda = (F_1 \otimes F_2)^\lambda$ ;

$$(6) F_1^{\lambda_1} \otimes F_1^{\lambda_2} = F_1 \lambda_1 + \lambda_2.$$

限于篇幅,以上性质的证明不再详细展开。

## (二) 区间值 Fermatean 模糊 Frank 加权平均算子

**定义8** 设  $F_i = \langle [\mu_{F_{L_i}}, \mu_{F_{U_i}}], [\nu_{F_{L_i}}, \nu_{F_{U_i}}] \rangle$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为一组区间 Fermatean 模糊数,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$  为权重向量,  $\omega_i \in [0, 1]$ ,  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ , 则区间 Fermatean 模糊 Frank 加权平均 (Interval-valued Fermatean fuzzy Frank weighted averaging, IVFFFWA) 算子定义如下:

$$\text{IVFFFWA}(F_1, F_2, \dots, F_n) = \bigoplus_{i=1}^n \omega_i F_i = \omega_1 F_1 \oplus \omega_2 F_2 \oplus \dots \oplus \omega_n F_n \quad (8)$$

**定理1** 设  $F_i = \langle [\mu_{F_{L_i}}, \mu_{F_{U_i}}], [\nu_{F_{L_i}}, \nu_{F_{U_i}}] \rangle$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为一组区间 Fermatean 模糊数, 则 IVFFFWA 算子的集成结果仍然为区间 Fermatean 模糊数, 且:

$$\text{IVFFFWA}(F_1, \dots, F_n) = \bigoplus_{i=1}^n \omega_i F_i = \left\langle \left[ \begin{array}{l} \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{1-\mu_{F_{L_i}}^3} - 1)^{\omega_i} \right)}, \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{1-\mu_{F_{U_i}}^3} - 1)^{\omega_i} \right)} \\ \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{\nu_{F_{L_i}}^3} - 1)^{\omega_i} \right)}, \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{\nu_{F_{U_i}}^3} - 1)^{\omega_i} \right)} \end{array} \right], \right\rangle \quad (9)$$

**证明:**

(1) 当  $n = 1$  时, 式(9)成立, 即  $\omega F = 1 \cdot F = F = \langle [\mu_{F_L}, \mu_{F_U}], [\nu_{F_L}, \nu_{F_U}] \rangle$ 。

(2) 当  $n = 2$  时, 有

$$\omega_i F_i = \left\langle \left[ \begin{array}{l} \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-\mu_{F_{L_i}}^3} - 1)^{\omega_i}}{(\gamma - 1)^{\omega_i - 1}} \right)}, \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-\mu_{F_{U_i}}^3} - 1)^{\omega_i}}{(\gamma - 1)^{\omega_i - 1}} \right)} \\ \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{\nu_{F_{L_i}}^3} - 1)^{\omega_i}}{(\gamma - 1)^{\omega_i - 1}} \right)}, \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{\nu_{F_{U_i}}^3} - 1)^{\omega_i}}{(\gamma - 1)^{\omega_i - 1}} \right)} \end{array} \right], \right\rangle \quad (i = 1, 2)$$

$$\omega_1 F_1 \oplus \omega_2 F_2 =$$

$$\left\langle \left[ \begin{array}{l} \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-\mu_{F_{L_1}}^3} - 1)^{\omega_1} \cdot (\gamma^{1-\mu_{F_{L_2}}^3} - 1)^{\omega_2}}{(\gamma - 1)^{\omega_1 - 1} (\gamma - 1)^{\omega_2 - 1}} \right)}, \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-\mu_{F_{U_1}}^3} - 1)^{\omega_1} \cdot (\gamma^{1-\mu_{F_{U_2}}^3} - 1)^{\omega_2}}{(\gamma - 1)^{\omega_1 - 1} (\gamma - 1)^{\omega_2 - 1}} \right)} \\ \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{\nu_{F_{L_1}}^3} - 1)^{\omega_1} \cdot (\gamma^{\nu_{F_{L_2}}^3} - 1)^{\omega_2}}{(\gamma - 1)^{\omega_1 - 1} (\gamma - 1)^{\omega_2 - 1}} \right)}, \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{\nu_{F_{U_1}}^3} - 1)^{\omega_1} \cdot (\gamma^{\nu_{F_{U_2}}^3} - 1)^{\omega_2}}{(\gamma - 1)^{\omega_1 - 1} (\gamma - 1)^{\omega_2 - 1}} \right)} \end{array} \right], \right\rangle$$

$$= \left\langle \left[ \begin{array}{l} \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-\mu_{F_{L_1}}^3} - 1)^{\omega_1} (\gamma^{1-\mu_{F_{L_2}}^3} - 1)^{\omega_2}}{(\gamma - 1)^{\omega_1 + \omega_2 - 1}} \right)}, \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-\mu_{F_{U_1}}^3} - 1)^{\omega_1} (\gamma^{1-\mu_{F_{U_2}}^3} - 1)^{\omega_2}}{(\gamma - 1)^{\omega_1 + \omega_2 - 1}} \right)} \\ \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{\nu_{F_{L_1}}^3} - 1)^{\omega_1} (\gamma^{\nu_{F_{L_2}}^3} - 1)^{\omega_2}}{(\gamma - 1)^{\omega_1 + \omega_2 - 1}} \right)}, \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{\nu_{F_{U_1}}^3} - 1)^{\omega_1} (\gamma^{\nu_{F_{U_2}}^3} - 1)^{\omega_2}}{(\gamma - 1)^{\omega_1 + \omega_2 - 1}} \right)} \end{array} \right], \right\rangle$$

$$= \left\langle \left[ \begin{array}{l} \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + (\gamma^{1-\mu_{F_{L_1}}^3} - 1)^{\omega_1} (\gamma^{1-\mu_{F_{L_2}}^3} - 1)^{\omega_2} \right)}, \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + (\gamma^{1-\mu_{F_{U_1}}^3} - 1)^{\omega_1} (\gamma^{1-\mu_{F_{U_2}}^3} - 1)^{\omega_2} \right)} \\ \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + (\gamma^{\nu_{F_{L_1}}^3} - 1)^{\omega_1} (\gamma^{\nu_{F_{L_2}}^3} - 1)^{\omega_2} \right)}, \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + (\gamma^{\nu_{F_{U_1}}^3} - 1)^{\omega_1} (\gamma^{\nu_{F_{U_2}}^3} - 1)^{\omega_2} \right)} \end{array} \right], \right\rangle$$

因此, 当  $n = 2$  时, 式(9)仍成立。

(3) 假设当  $n = k$  时, 式(9)成立。则当  $n = k + 1$  时, 有

$$\begin{aligned}
 \text{IVFFFWA}(r_1, r_2, \dots, r_n) &= \bigoplus_{i=1}^k \omega_i F_i \oplus \omega_{k+1} F_{k+1} \\
 &= \left\langle \left[ \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{\prod_{i=1}^k (\gamma^{1-\mu_{F_i}^3} - 1) \omega_i}{(\gamma - 1) \sum_{i=1}^k \omega_i} \right)}, \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{\prod_{i=1}^k (\gamma^{1-\mu_{F_i}^3} - 1) \omega_i}{(\gamma - 1) \sum_{i=1}^k \omega_i} \right)} \right], \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{\prod_{i=1}^k (\gamma^{\nu_{F_i}^3} - 1) \omega_i}{(\gamma - 1) \sum_{i=1}^k \omega_i} \right)}, \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{\prod_{i=1}^k (\gamma^{\nu_{F_i}^3} - 1) \omega_i}{(\gamma - 1) \sum_{i=1}^k \omega_i} \right)} \right] \right\rangle \oplus \\
 &\quad \left\langle \left[ \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-\mu_{F_{k+1}}^3} - 1) \omega_{k+1}}{(\gamma - 1) \omega_{k+1}} \right)}, \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{1-\mu_{F_{k+1}}^3} - 1) \omega_{k+1}}{(\gamma - 1) \omega_{k+1}} \right)} \right], \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{\nu_{F_{k+1}}^3} - 1) \omega_{k+1}}{(\gamma - 1) \omega_{k+1}} \right)}, \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{(\gamma^{\nu_{F_{k+1}}^3} - 1) \omega_{k+1}}{(\gamma - 1) \omega_{k+1}} \right)} \right] \right\rangle \\
 &= \left\langle \left[ \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{\prod_{i=1}^k (\gamma^{1-\mu_i^3} - 1) \omega_i \cdot (\gamma^{1-\mu_{i+1}^3} - 1) \omega_{i+1}}{(\gamma - 1) \sum_{i=1}^k \omega_i - 1 \cdot (\gamma - 1) \omega_{i+1}} \right)}, \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{\prod_{i=1}^k (\gamma^{1-\mu_i^3} - 1) \omega_i \cdot (\gamma^{1-\mu_{i+1}^3} - 1) \omega_{i+1}}{(\gamma - 1) \sum_{i=1}^k \omega_i - 1 \cdot (\gamma - 1) \omega_{i+1}} \right)} \right], \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{\prod_{i=1}^k (\gamma^{\nu_i^3} - 1) \omega_i \cdot (\gamma^{\nu_{i+1}^3} - 1) \omega_{i+1}}{(\gamma - 1) \sum_{i=1}^k \omega_i - 1 \cdot (\gamma - 1) \omega_{i+1}} \right)}, \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{\prod_{i=1}^k (\gamma^{\nu_i^3} - 1) \omega_i \cdot (\gamma^{\nu_{i+1}^3} - 1) \omega_{i+1}}{(\gamma - 1) \sum_{i=1}^k \omega_i - 1 \cdot (\gamma - 1) \omega_{i+1}} \right)} \right] \right\rangle \\
 &= \left\langle \left[ \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{\prod_{i=1}^{k+1} (\gamma^{1-\mu_{F_i}^3} - 1) \omega_i}{(\gamma - 1) \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i} \right)}, \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \frac{\prod_{i=1}^{k+1} (\gamma^{1-\mu_{F_i}^3} - 1) \omega_i}{(\gamma - 1) \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i} \right)} \right], \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{\prod_{i=1}^{k+1} (\gamma^{\nu_{F_i}^3} - 1) \omega_i}{(\gamma - 1) \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i} \right)}, \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \frac{\prod_{i=1}^{k+1} (\gamma^{\nu_{F_i}^3} - 1) \omega_i}{(\gamma - 1) \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i} \right)} \right] \right\rangle \\
 &= \left\langle \left[ \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \prod_{i=1}^{k+1} (\gamma^{1-\mu_{F_i}^3} - 1) \omega_i \right)}, \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \prod_{i=1}^{k+1} (\gamma^{1-\mu_{F_i}^3} - 1) \omega_i \right)} \right], \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \prod_{i=1}^{k+1} (\gamma^{\nu_{F_i}^3} - 1) \omega_i \right)}, \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \prod_{i=1}^{k+1} (\gamma^{\nu_{F_i}^3} - 1) \omega_i \right)} \right] \right\rangle
 \end{aligned}$$

因此, 当  $n = k + 1$  时, 式(9) 也成立, 综上所述, 对于任意的  $n$ , 式(9) 成立。

再者,

$$\begin{aligned}
 &\left[ \sqrt[3]{1 - \log_\gamma \left( 1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{1-\mu_{F_i}^3} - 1) \omega_i \right)} \right]^3 + \left[ \sqrt[3]{\log_\gamma \left( 1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{\nu_{F_i}^3} - 1) \omega_i \right)} \right]^3 \\
 &= 1 - \log_\gamma \left( 1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{1-\mu_{F_i}^3} - 1) \omega_i \right) + \log_\gamma \left( 1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{\nu_{F_i}^3} - 1) \omega_i \right) \\
 &\leq 1 - \log_\gamma \left( 1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{1-\mu_{F_i}^3} - 1) \omega_i \right) + \log_\gamma \left( 1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{1-\mu_{F_i}^3} - 1) \omega_i \right) = 1
 \end{aligned}$$

且有  $0 \leq 1 - \log_\gamma(1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{1-\mu_{F_{L_i}}^3} - 1)^{\omega_i}) \leq 1, 0 \leq 1 - \log_\gamma(1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{1-\mu_{F_{U_i}}^3} - 1)^{\omega_i}) \leq 1, 0 \leq \log_\gamma(1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{\nu_{F_{L_i}}^3} - 1)^{\omega_i}) \leq 1, 0 \leq \log_\gamma(1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{\nu_{F_{U_i}}^3} - 1)^{\omega_i}) \leq 1$ 。

因此,IVFFFWA 算子集成后仍然为 IVFFN,证毕。

**定理2** 设  $F_i = \langle [\mu_{F_{L_i}}, \mu_{F_{U_i}}], [\nu_{F_{L_i}}, \nu_{F_{U_i}}] \rangle, F'_i = \langle [\mu'_{F_{L_i}}, \mu'_{F_{U_i}}], [\nu'_{F_{L_i}}, \nu'_{F_{U_i}}] \rangle (i = 1, 2, \dots, n)$  为两组区间 Fermatean 模糊数,则 IVFFFWA 算子具有以下性质:

- (1) 幂等性:若  $F_i = F = \langle [\mu_{F_L}, \mu_{F_U}], [\nu_{F_L}, \nu_{F_U}] \rangle$ ,则有  $IVFFFWA(F_1, F_2, \dots, F_n) = F$
- (2) 交换性:若集合  $\{F'_1, F'_2, \dots, F'_n\}$  为集合  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  中元素的任意排列组合,则有  $IVFFFWA(F_1, F_2, \dots, F_n) = IVFFFWA(F'_1, F'_2, \dots, F'_n)$
- (3) 单调性:若对于  $\forall i$ ,若  $\mu_{F_{L_i}} \leq \mu'_{F_{L_i}}, \mu_{F_{U_i}} \leq \mu'_{F_{U_i}}, \nu_{F_{L_i}} \geq \nu'_{F_{L_i}}, \nu_{F_{U_i}} \geq \nu'_{F_{U_i}}$ ,则  $IVFFFWA(F_1, F_2, \dots, F_n) \leq IVFFFWA(F'_1, F'_2, \dots, F'_n)$
- (4) 有界性:若  $F^- = ([\min_{1 \leq i \leq n}(\mu_{F_{L_i}}), \min_{1 \leq i \leq n}(\mu_{F_{U_i}})], [\max_{1 \leq i \leq n}(\nu_{F_{L_i}}), \max_{1 \leq i \leq n}(\nu_{F_{U_i}})])$ ,  $F^+ = ([\max_{1 \leq i \leq n}(\mu_{F_{L_i}}), \max_{1 \leq i \leq n}(\mu_{F_{U_i}})], [\min_{1 \leq i \leq n}(\nu_{F_{L_i}}), \min_{1 \leq i \leq n}(\nu_{F_{U_i}})])$ ,则有  $F^- \leq IVFFFWA(F_1, F_2, \dots, F_n) \leq F^+$ 。

**(三) 区间值 Fermatean 模糊 Frank 加权几何算子**

**定义9** 设  $F_i = \langle [\mu_{F_{L_i}}, \mu_{F_{U_i}}], [\nu_{F_{L_i}}, \nu_{F_{U_i}}] \rangle (i = 1, 2, \dots, n)$  为一组区间 Fermatean 模糊数,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$  为权重向量,  $\omega_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ , 则区间值 Fermatean 模糊 Frank 加权几何 (Interval-valued Fermatean fuzzy Frank weighted geometric, IVFFFWG) 算子定义如下:

$$IVFFFWG(F_1, F_2, \dots, F_n) = \bigotimes_{i=1}^n F_i^{\omega_i} = F_1^{\omega_1} \otimes F_2^{\omega_2} \otimes \dots \otimes F_n^{\omega_n} \tag{10}$$

**定理3** 设  $F_i = \langle [\mu_{F_{L_i}}, \mu_{F_{U_i}}], [\nu_{F_{L_i}}, \nu_{F_{U_i}}] \rangle (i = 1, 2, \dots, n)$  为一组区间 Fermatean 模糊数,则 IVFFFWG 算子的集成结果仍然为区间 Fermatean 模糊数,且

$$IVFFFWG(F_1, F_2, \dots, F_n) = \bigotimes_{i=1}^n F_i^{\omega_i} = \left\langle \left[ \begin{aligned} & \left[ \sqrt[3]{\log_\gamma(1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{\mu_{F_{L_i}}^3} - 1)^{\omega_i})}, \sqrt[3]{\log_\gamma(1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{\mu_{F_{U_i}}^3} - 1)^{\omega_i})} \right], \\ & \left[ \sqrt[3]{1 - \log_\gamma(1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{1-\nu_{F_{L_i}}^3} - 1)^{\omega_i})}, \sqrt[3]{1 - \log_\gamma(1 + \prod_{i=1}^n (\gamma^{1-\nu_{F_{U_i}}^3} - 1)^{\omega_i})} \right] \end{aligned} \right. \right\rangle \tag{11}$$

定理3的证明与定理1类似,限于篇幅,此处省略。而且,IVFFFWG 同样具有幂等性、交换性、单调性和有界性。

下面对 IVFFFWA 和 IVFFFWG 算子的特殊情形进行讨论,

(1) 当  $\gamma \rightarrow 1$  时,IVFFFWA 算子退化成区间值 Fermatean 模糊加权平均 (Interval-valued Fermatean fuzzy weighted average, IVFFWA) 算子<sup>[15]</sup>,即

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} IVFFFWA(F_1, \dots, F_n) = IVFFWA(F_1, \dots, F_n) = \left\langle \left[ \begin{aligned} & \left[ \sqrt[3]{1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_{F_{L_i}}^3)^{\omega_i}}, \sqrt[3]{1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_{F_{U_i}}^3)^{\omega_i}} \right], \\ & \left[ \prod_{i=1}^n \nu_{F_{L_i}}^{\omega_i}, \prod_{i=1}^n \nu_{F_{U_i}}^{\omega_i} \right] \end{aligned} \right. \right\rangle$$

(2) 当  $\gamma \rightarrow +\infty$  时,则有 IVFFFWA 算子退化成传统的区间值加权平均 (Interval-valued weighted average, IWVA) 算子,即

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} IVFFFWA(F_1, \dots, F_n) = IWVA(F_1, \dots, F_n) = \left\langle \left[ \begin{aligned} & \left[ \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_{F_{L_i}}, \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_{F_{U_i}} \right], \left[ \sum_{i=1}^n \omega_i \nu_{F_{L_i}}, \sum_{i=1}^n \omega_i \nu_{F_{U_i}} \right] \end{aligned} \right. \right\rangle$$

(3) 当  $\gamma \rightarrow 1$  时, IVFFWG 算子退化成区间值 Fermatean 模糊加权几何 (Interval-valued Fermatean fuzzy weighted geometric, IVFFWG) 算子<sup>[15]</sup>, 即

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \text{IVFFWG}(F_1, \dots, F_n) = \text{IVFFWG}(F_1, \dots, F_n) = \left\langle \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{F_{L_i}}^{\omega_i}, \prod_{i=1}^n \mu_{F_{U_i}}^{\omega_i} \right], \left[ \sqrt[3]{1 - \prod_{i=1}^n (1 - \nu_{F_{L_i}}^3)^{\omega_i}}, \sqrt[3]{1 - \prod_{i=1}^n (1 - \nu_{F_{U_i}}^3)^{\omega_i}} \right] \right\rangle$$

(4) 当  $\gamma \rightarrow +\infty$  时, 则有 IVFFWG 算子退化成传统的区间值加权平均 (Interval-valued weighted average, IVWA) 算子, 即

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \text{IVFFWG}(F_1, \dots, F_n) = \text{IVWA}(F_1, \dots, F_n) = \left\langle \left[ \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_{F_{L_i}}, \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_{F_{U_i}} \right], \left[ \sum_{i=1}^n \omega_i \nu_{F_{L_i}}, \sum_{i=1}^n \omega_i \nu_{F_{U_i}} \right] \right\rangle$$

### 四、评价专家权重与信任共识交互模型

在实际群组评价过程中, 评价专家知识背景和经验差异等因素往往导致初始评价意见难以达成一致, 由此产生共识达成问题。基于未达成共识的评价信息做出的决策, 其结果的科学性和合理性难以保证, 因此群体共识达成对决策结果至关重要。随着 web2.0 技术的普及, 专家间的联系更加紧密, 相应的专家间的信任网络也日益凸显, 评价专家间的信任关系对专家权重和共识达成具有重要的影响, 因此有必要研究基于专家信任的专家权重方法和共识达成机理。

#### (一) 评价专家权重

在群组综合评价过程中, 评价专家间或多或少都存在一定程度的信任关系, 将信任关系集与评价专家集合组成的网络结构, 称为信任网络。具体而言, 一个信任网络可记为  $G = \langle E, TR \rangle$ , 其中  $E$  表示评价专家集,  $TR$  表示信任关系的集合, 图1为由4位评价专家组成的信任网络:

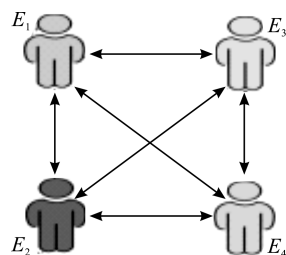


图 1 评价专家间的信任关系网络

图1中有向箭头表示评价专家间的信任关系, 评价专家集  $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ 。由于评价专家通常采用“非常信任”, “比较信任”, “一般信任”等语言术语表达对他人的信任程度(周晓阳等, 2020)<sup>[25]</sup>, 因此本文利用语言术语表达评价专家间的信任关系。设  $S = \{s_{-\tau}, s_{-\tau+1}, \dots, s_0, \dots, s_{\tau-1}, s_{\tau}\}$  为语言术语集, 其中  $\tau$  为正整数。则评价专家间的信任网络可表示成如下的信任关系矩阵形式:

$$TR = \begin{pmatrix} - & TR_{12} & TR_{13} & TR_{14} \\ TR_{21} & - & TR_{23} & TR_{24} \\ TR_{31} & TR_{32} & - & TR_{34} \\ TR_{41} & TR_{42} & TR_{43} & - \end{pmatrix}$$

其中, 信任关系  $TR_{st} (s, t = 1, 2, 3, 4)$  用语言术语  $s_{\alpha} (\alpha = -\tau, -\tau+1, \dots, 0, \dots, \tau-1, \tau)$  来表示。

由于定性语言变量无法适用于定量的评价专家权重的求解过程, 因此本文利用周晓阳等(2020)<sup>[25]</sup> 中的转化方法将语言术语定量化, 转化为如下信任程度形式, 表达式如下:

$$TD_{st} = \frac{\alpha_{TR_{st}} + \tau}{2\tau} \tag{12}$$

其中,  $\alpha_{TR_{st}}$  表示用语言术语  $s_t$  表示信任关系  $TR_{st}$  时  $s_t$  的下标, 进而, 可将图1中信任关系矩阵  $TR$  转化为信任程度矩阵  $TD$ :



$$TD = \begin{pmatrix} - & TD_{12} & TD_{13} & TD_{14} \\ TD_{21} & - & TD_{23} & TD_{24} \\ TD_{31} & TD_{32} & - & TD_{34} \\ TD_{41} & TD_{42} & TD_{43} & - \end{pmatrix}$$

基于上述信任程度矩阵  $TD$ , 可计算评价专家  $E_i (i = 1, 2, 3, 4)$  的权重:

$$\omega_i = \frac{\sum_{s=1, s \neq i}^4 TD_{si}}{\sum_{t=1}^4 \sum_{s=1, s \neq t}^4 TD_{st}} \quad (13)$$

显然,  $0 \leq \omega_i \leq 1$  且  $\sum_{i=1}^4 \omega_i = 1$ 。

### (二) 基于信任网络的共识交互模型

在区间 Fermatean 模糊环境下, 本节提出一种基于信任网络的共识交互模型, 以弥补现有共识交互模型未发挥信任关系在共识达成中的真正作用的缺陷, 同时充分考虑了评价专家对意见的接受意愿。具体可分为基于区间 Fermatean 模糊距离测度的共识度量、识别与个性化反馈机制三个方面:

设某群组评价问题有  $m$  个备选方案  $Z_i (i = 1, 2, \dots, m)$ ,  $n$  个评价指标  $C_j (j = 1, 2, \dots, n)$ , 专家  $E_i (i = 1, 2, \dots, K)$  对方案进行评估, 得到相应的区间 Fermatean 模糊评价矩阵为  $F^t = (F_{ij}^t)_{m \times n} (t = 1, 2, \dots, K)$ , 则共识度的度量可从指标、方案和专家三个层次考虑:

**层次1:** 从指标层面出发, 专家  $E_i$  对方案  $Z_i$  在指标  $C_j$  下的共识度为:

$$CE_{ij}^t = 1 - d(F_{ij}^t, \bar{F}_{ij}) \\ = 1 - \frac{1}{4} [ |\mu_{F_{L_i}}^3 - \mu_{\bar{F}_L}^3| + |\mu_{F_{U_i}}^3 - \mu_{\bar{F}_U}^3| + |\nu_{F_{L_i}}^3 - \nu_{\bar{F}_L}^3| + |\nu_{F_{U_i}}^3 - \nu_{\bar{F}_U}^3| + |\pi_{F_{L_i}}^3 - \pi_{\bar{F}_L}^3| + |\pi_{F_{U_i}}^3 - \pi_{\bar{F}_U}^3| ] \quad (14)$$

其中,  $\bar{F}_{ij}$  为群组综合评价意见, 可根据式(9)、式(11)和式(13)进行求解,  $d(F_{ij}^t, \bar{F}_{ij})$  为专家  $E_i$  的评价意见  $F_{ij}^t$  与群组综合评价意见  $\bar{F}_{ij}$  的距离测度, 由式(5)计算得到。

**层次2:** 从方案层面出发, 专家  $E_i$  对方案  $Z_i$  的共识度为:

$$CA_i^t = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n CE_{ij}^t \quad (15)$$

**层次3:** 从专家层面出发, 专家  $E_i$  的共识度为:

$$CI^t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m CA_i^t \quad (16)$$

基于式(14)–(16)可得各评价专家的共识度, 进而可根据以下三个层次的共识度识别模型, 识别未达成共识专家的评价意见, 同样分为指标、方案和专家三个层次:

**层次1:** 找出所有共识度低于共识阈值  $\delta$  的评价专家, 表示如下:

$$EXPCH = \{ t \mid CI^t < \delta \} \quad (17)$$

**层次2:** 基于层次1, 找出所有共识度低于共识阈值  $\delta$  的方案, 表示如下:

$$ALT = \{ (t, i) \mid t \in EXPCH \wedge CA_i^t < \delta \} \quad (18)$$

**层次3:** 基于层次2, 找出所有共识度低于共识阈值  $\delta$  的指标信息:

$$APS = \{ (t, i, j) \mid (t, i) \in ALT \wedge CE_{ij}^t < \delta \} \quad (19)$$

根据式(17)–(19)识别出未达成共识的专家的评价意见后, 需对其进行意见调整以提高群组共识度。下面提出一种个性化反馈机制调整专家评价意见, 表达式如下:

$$FF_{ij}^t = (1 - \vartheta) \cdot F_{ij}^t \oplus \vartheta \cdot \bar{F} \quad (20)$$

其中,

$$\bar{F} = ([\bar{\mu}_{F_{L_{ij}}}, \bar{\mu}_{F_{U_{ij}}}], [\bar{\nu}_{F_{L_{ij}}}, \bar{\nu}_{F_{U_{ij}}}], [\bar{\pi}_{F_{L_{ij}}}, \bar{\pi}_{F_{U_{ij}}}], [\bar{\rho}_1 F_{11} \oplus \rho_2 F_{12} \oplus \dots \oplus \rho_t F_{1t}]) \quad (21)$$

式(21)中  $l$  表示专家  $E_i$  有  $l$  个信任的专家,  $\rho_r (r=1, 2, \dots, l), l \leq K$  表示专家  $E_i$  对专家  $E_r$  的信任程度占专家  $E_i$  对所有信任专家信任程度之和的比重, 假设专家  $E_i$  对专家  $E_r (r=1, 2, \dots, l), l \leq K$  的信任程度用  $TD_{ir} (r=1, 2, \dots, l)$  表示, 则有:

$$\rho_r = \frac{TD_{ir}}{\sum_{r=1}^l TD_{ir}} \tag{22}$$

### 五、区间 Fermatean 模糊信任网络群组综合评价方法

在对专家评价信息集成之前, 还需获得评价指标的权重, 否则无法获得各方案的综合评价值, 同时无法进一步对方案排序与择优。因此, 本文将提出一种基于区间 Fermatean 模糊熵的指标权重计算方法, 具体过程如下。

首先, 定义 IVFF 熵。令  $\bar{F}_{ij}$  为方案  $Z_i$  在指标  $C_j$  下的综合评价值, 那么对指标  $C_j$  的熵为:

$$E(C_j) = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^m [S(\bar{F}_{ij}) \cdot \ln(S(\bar{F}_{ij}))], j = 1, 2, \dots, n \tag{23}$$

其中  $S(\bar{F}_{ij})$  为  $\bar{F}_{ij}$  的得分函数, 可根据式(3)计算。

进而, 基于式(23)可得评价指标  $C_j$  权重  $w_j$ , 表达式如下:

$$w_j = \frac{1 - E_j(\bar{F}_{ij})}{\sum_{j=1}^n (1 - E_j(\bar{F}_{ij}))} \tag{24}$$

可以看出,  $0 \leq w_j \leq 1$  且  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ 。

基于以上指标权重计算过程, 结合区间 Fermatean 模糊 Frank 算子、评价专家权重以及信任共识交互模型, 下面提出区间 Fermatean 模糊信任网络群组综合评价方法, 其评价流程如图2所示。

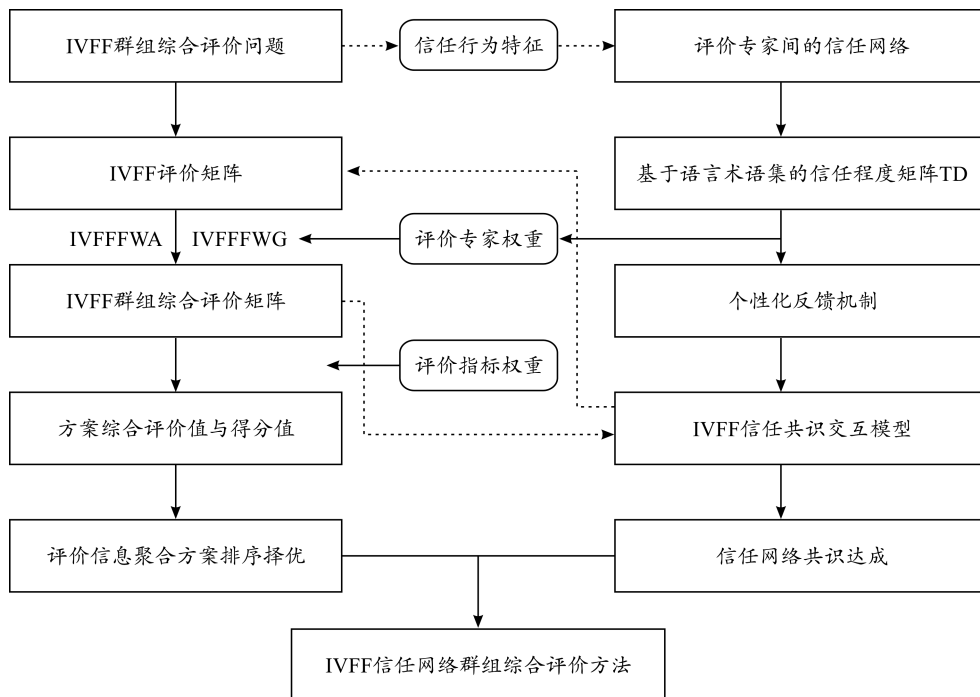


图2 IVFF 信任网络群组综合评价方法

具体评价过程如下:

步骤1:构建评价专家间基于语言术语的信任网络,基于式(12)—(13)计算评价专家权重 $\omega_i$ ,然后利用式(9)或式(11)对专家个体的评价信息进行集成,得到群组综合评价矩阵 $\bar{F}$ 。

步骤2:利用式(14)—(16)计算评价专家共识度,进而基于式(17)—(19)识别未达成共识的专家的评价意见,然后通过式(20)—(22)对未达成共识的专家评价意见进行反馈调整。

步骤3:若调整后评价专家共识度都大于共识度阈值,则继续步骤4;否则,重复步骤2中式(14)—(19)的计算过程,直至评价专家共识度都大于共识度阈值为止。

步骤4:基于共识达成后的群组综合评价矩阵,结合式(23)—(24)计算评价指标权重,进而基于式(9)或式(11)计算各方案的综合评价价值。

步骤5:根据步骤4的综合评价价值,结合式(3)—(4)对方案进行择优排序。

## 六、案例分析

### (一) 本科生统计设计能力评价研究

为进一步提高商科类专业本科生对统计学的学习兴趣,加强统计思维和统计素养的培养,统计设计能力的提高,某高校商学院对统计学的教学目标、内容和方法等方面进行了一系列改革。在课程定位方面,虽然在统计学中需要用到大量的数学理论、方法、技巧,但统计学更多地侧重于数据,侧重于应用。因此在商科专业的统计学教学过程中不侧重于统计方法的数学原理推导,而注重阐明统计方法中隐含的统计思想以及这些方法在实际领域中的具体应用。在教学方法上,注重将理论与实际相结合,倡导学生自主学习、自主踊跃讨论,着重提高学生应用统计方法解决实际问题的能力。在教学内容方面,从商科类专业学生实际出发,为他们量身定制教学内容,侧重于统计思想、方法的讲解、统计软件工具的使用,并结合实际经济社会管理中的案例进行统计分析,使学生真正意识到统计是一个非常有用的工具。

为了检验统计学课程建设和改革等方面的效果,下面根据统计类学科相关特征,结合相关文献<sup>[26-28]</sup>,提出高校商科类专业本科生统计设计能力的综合评价指标体系,具体指标含义解释如下。

1. **数据收集能力**  $C_1$ 。经过统计学课程的学习,学生应当掌握各类数据收集方法和渠道,具备收集、存储和转换各种形式信息的能力。同时,面对数量繁多、类型多样的调查类数据信息,学生还应具备统计调查问卷设计能力,以保证调查问卷数据收集方法的有效性和科学性。

2. **数据分析能力**  $C_2$ 。指利用统计分析方法并结合数据分析工具(如 SAS、SPSS 等),对所收集的数据信息进行统计描述和分析整理,进而以图表化等丰富多样的形式展示数据的特征。

3. **统计处理能力**  $C_3$ 。指依据合适的统计方法构建统计模型,探索数据背后的规律、逻辑关系和其他特征,进而对经济、社会发展现象进行接受并进行趋势预测分析。

4. **应用能力**  $C_4$ 。指学生将数据的收集、分析和处理的结果进行归纳总结和应用,进而对社会现象和问题进行更深层次的分析,并以此提出有价值的建议。其中可以展示学生对社会现象的敏锐洞察力和统计拓展能力。

5. **数据伦理道德**  $C_5$ 。指学生在数据的收集、处理等过程中的道德和伦理问题,学生应树立正确的法治理念,遵守相关道德规范,不收集使用未经授权的数据信息,不得随意公开、泄露隐私数据,同时要真正做到数据收集的真实性,不得弄虚作假、随意篡改等。

现邀请4位统计学专业领域的相关专家,根据上述5个评价指标对某高校商学院的金融  $A_1$ 、经济  $A_2$ 、会计  $A_3$  和国际贸易  $A_4$  等4个专业的本科生统计设计能力进行综合评估。其中4位专家给出的评价信息为表1-4:

表1 专家  $E_1$  的评价矩阵

$E_1$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$A_1$	[(0.7,0.8), (0.3,0.5)]	[(0.4,0.6), (0.5,0.7)]	[(0.8,0.9), (0.3,0.4)]	[(0.2,0.3), (0.5,0.7)]	[(0.1,0.3), (0.6,0.8)]
$A_2$	[(0.5,0.6), (0.2,0.4)]	[(0.4,0.7), (0.5,0.6)]	[(0.6,0.7), (0.1,0.2)]	[(0.3,0.4), (0.7,0.8)]	[(0.3,0.5), (0.6,0.7)]
$A_3$	[(0.3,0.5), (0.6,0.7)]	[(0.4,0.5), (0.6,0.8)]	[(0.3,0.4), (0.6,0.7)]	[(0.4,0.7), (0.3,0.5)]	[(0.4,0.8), (0.5,0.6)]
$A_4$	[(0.4,0.6), (0.5,0.8)]	[(0.5,0.6), (0.3,0.4)]	[(0.5,0.7), (0.5,0.6)]	[(0.3,0.6), (0.4,0.7)]	[(0.3,0.5), (0.4,0.7)]

表2 专家  $E_2$  的评价矩阵

$E_2$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$A_1$	[(0.5,0.6), (0.3,0.4)]	[(0.5,0.7), (0.3,0.4)]	[(0.6,0.7), (0.3,0.5)]	[(0.1,0.3), (0.4,0.7)]	[(0.2,0.4), (0.6,0.7)]
$A_2$	[(0.5,0.7), (0.3,0.4)]	[(0.6,0.8), (0.2,0.4)]	[(0.4,0.6), (0.1,0.2)]	[(0.1,0.2), (0.5,0.8)]	[(0.3,0.4), (0.7,0.9)]
$A_3$	[(0.6,0.9), (0.4,0.5)]	[(0.5,0.6), (0.2,0.3)]	[(0.4,0.5), (0.6,0.8)]	[(0.2,0.3), (0.5,0.6)]	[(0.5,0.7), (0.3,0.4)]
$A_4$	[(0.3,0.5), (0.6,0.7)]	[(0.4,0.5), (0.1,0.2)]	[(0.4,0.5), (0.6,0.8)]	[(0.2,0.4), (0.5,0.7)]	[(0.4,0.5), (0.6,0.7)]

表3 专家  $E_3$  的评价矩阵

$E_3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$A_1$	[(0.1,0.2), (0.7,0.9)]	[(0.2,0.3), (0.4,0.7)]	[(0.1,0.3), (0.6,0.8)]	[(0.6,0.9), (0.1,0.2)]	[(0.5,0.7), (0.2,0.3)]
$A_2$	[(0.2,0.3), (0.4,0.5)]	[(0.2,0.2), (0.2,0.3)]	[(0.5,0.8), (0.2,0.3)]	[(0.4,0.6), (0.2,0.2)]	[(0.5,0.8), (0.1,0.2)]
$A_3$	[(0.3,0.6), (0.4,0.6)]	[(0.5,0.7), (0.2,0.4)]	[(0.3,0.4), (0.5,0.7)]	[(0.4,0.5), (0.3,0.6)]	[(0.2,0.3), (0.6,0.8)]
$A_4$	[(0.2,0.3), (0.3,0.4)]	[(0.3,0.3), (0.4,0.5)]	[(0.2,0.3), (0.7,0.9)]	[(0.1,0.2), (0.8,0.9)]	[(0.8,0.9), (0.1,0.3)]

表4 专家  $E_4$  的评价矩阵

$E_4$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$A_1$	[(0.4,0.5), (0.3,0.4)]	[(0.6,0.7), (0.2,0.3)]	[(0.5,0.8), (0.4,0.4)]	[(0.2,0.2), (0.4,0.6)]	[(0.1,0.3), (0.7,0.9)]
$A_2$	[(0.3,0.5), (0.5,0.7)]	[(0.7,0.8), (0.4,0.5)]	[(0.5,0.6), (0.2,0.3)]	[(0.3,0.4), (0.6,0.7)]	[(0.3,0.3), (0.7,0.8)]
$A_3$	[(0.6,0.8), (0.3,0.4)]	[(0.4,0.6), (0.5,0.7)]	[(0.2,0.3), (0.5,0.7)]	[(0.5,0.6), (0.3,0.4)]	[(0.5,0.7), (0.2,0.3)]
$A_4$	[(0.4,0.6), (0.7,0.8)]	[(0.5,0.5), (0.3,0.4)]	[(0.3,0.3), (0.6,0.7)]	[(0.3,0.5), (0.4,0.6)]	[(0.4,0.6), (0.5,0.7)]

步骤1: 设评价专家间的信任社会矩阵表示如下(设  $\tau = 3$ ):

$$TR = \begin{pmatrix} - & S_{-1} & S_2 & S_{-1} \\ S_2 & - & S_{-2} & S_3 \\ S_1 & S_0 & - & S_{-3} \\ S_{-3} & S_2 & S_{-2} & - \end{pmatrix}$$

首先, 将  $TR$  矩阵转化为信任程度矩阵  $TD$  矩阵, 表示如下:

$$TD = \begin{pmatrix} - & 1/3 & 5/6 & 1/3 \\ 5/6 & - & 1/6 & 1 \\ 2/3 & 1/2 & - & 0 \\ 0 & 5/6 & 1/6 & - \end{pmatrix}$$

则基于式(12)一式(13)可得评价专家权重,

$$\omega = (0.265, 0.294, 0.206, 0.235)^T$$

其次, 利用式(9)并结合表1-4, 对专家个体信息进行集成。不失一般性, 假设  $\gamma = 2$ , 可得群组综合评价矩阵  $E_g$ , 如表5所示:

表5 群组综合评价矩阵  $E_g$

$E_g$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$A_1$	[(0.5319,0.6294), (0.3592,0.5069)]	[(0.4767,0.6310), (0.3321,0.4906)]	[(0.6284,0.7748), (0.3713,0.4958)]	[(0.3727,0.6124), (0.3202,0.5276)]	[(0.3091,0.4793), (0.5007,0.6566)]
$A_2$	[(0.4290,0.5842), (0.3231,0.4795)]	[(0.5540,0.7267), (0.3009,0.4436)]	[(0.5099,0.6834), (0.1358,0.2392)]	[(0.3006,0.4329), (0.4765,0.5940)]	[(0.3629,0.5671), (0.4578,0.6152)]
$A_3$	[(0.5075,0.7727), (0.4174,0.5405)]	[(0.4561,0.6044), (0.3340,0.5102)]	[(0.3226,0.4194), (0.5540,0.7286)]	[(0.3970,0.5669), (0.3492,0.5207)]	[(0.4407,0.6963), (0.3619,0.4845)]
$A_4$	[(0.3470,0.5344), (0.5167,0.6723)]	[(0.4440,0.5074), (0.2308,0.3424)]	[(0.3930,0.5281), (0.5910,0.7393)]	[(0.2525,0.4784), (0.4958,0.7136)]	[(0.5499,0.6823), (0.3596,0.5928)]

步骤2:式(14)一式(16)计算评价专家共识度,即

$$CI^1 = 0.850, CI^2 = 0.893, CI^3 = 0.783, CI^4 = 0.867。$$

同时可得方案和指标层面的共识度,即方案层面上的共识度:

$$CA^1 = (0.809, 0.880, 0.833, 0.877), CA^2 = (0.917, 0.839, 0.893, 0.925),$$

$$CA^3 = (0.706, 0.820, 0.873, 0.735), CA^4 = (0.839, 0.842, 0.910, 0.877)。$$

指标层面上的共识度:

$$CE^1 = \begin{pmatrix} 0.772 & 0.844 & 0.736 & 0.853 & 0.840 \\ 0.954 & 0.883 & 0.946 & 0.731 & 0.885 \\ 0.760 & 0.721 & 0.950 & 0.912 & 0.823 \\ 0.853 & 0.919 & 0.861 & 0.918 & 0.834 \end{pmatrix}, CE^2 = \begin{pmatrix} 0.928 & 0.946 & 0.911 & 0.873 & 0.925 \\ 0.905 & 0.913 & 0.911 & 0.836 & 0.628 \\ 0.824 & 0.930 & 0.874 & 0.881 & 0.955 \\ 0.941 & 0.964 & 0.940 & 0.963 & 0.819 \end{pmatrix},$$

$$CE^3 = \begin{pmatrix} 0.552 & 0.837 & 0.657 & 0.668 & 0.813 \\ 0.878 & 0.691 & 0.893 & 0.849 & 0.788 \\ 0.821 & 0.924 & 0.948 & 0.955 & 0.717 \\ 0.745 & 0.918 & 0.769 & 0.622 & 0.622 \end{pmatrix}, CE^4 = \begin{pmatrix} 0.852 & 0.900 & 0.909 & 0.867 & 0.668 \\ 0.838 & 0.812 & 0.945 & 0.879 & 0.737 \\ 0.910 & 0.851 & 0.919 & 0.930 & 0.937 \\ 0.751 & 0.962 & 0.892 & 0.897 & 0.882 \end{pmatrix}。$$

假设  $\delta = 0.8$ ,则根据式(17)一式(19),可得评价专家  $E_3$  的共识度  $CI^3 < \delta$ ,进而可得如下需要调整的专家意见:

$$F_{11}^3, F_{13}^3, F_{14}^3, F_{41}^3, F_{43}^3, F_{44}^3, F_{45}^3,$$

基于式(20)一式(22),可将评价意见修改为:

$$F_{11}^3: [(0.1, 0.2), (0.7, 0.9)] \rightarrow [(0.5130, 0.6053), (0.4630, 0.6507)],$$

$$F_{13}^3: [(0.1, 0.3), (0.6, 0.8)] \rightarrow [(0.6026, 0.7130), (0.4265, 0.5996)],$$

$$F_{14}^3: [(0.6, 0.9), (0.1, 0.2)] \rightarrow [(0.4864, 0.7763), (0.2142, 0.3796)],$$

$$F_{41}^3: [(0.2, 0.3), (0.3, 0.4)] \rightarrow [(0.3047, 0.4714), (0.4041, 0.5551)],$$

$$F_{43}^3: [(0.2, 0.3), (0.7, 0.9)] \rightarrow [(0.3788, 0.5275), (0.6166, 0.7865)],$$

$$F_{44}^3: [(0.1, 0.2), (0.8, 0.9)] \rightarrow [(0.2152, 0.4537), (0.5996, 0.7968)],$$

$$F_{45}^3: [(0.8, 0.9), (0.1, 0.3)] \rightarrow [(0.6753, 0.7932), (0.2196, 0.4630)],$$

步骤3:意见修改后可得评价专家新的共识度,即

$$CI^1 = 0.862, CI^2 = 0.894, CI^3 = 0.848, CI^4 = 0.876。$$

此时,所有专家共识度均大于阈值  $\delta = 0.8$ ,因此无须进一步调整。

步骤4:基于步骤3可得共识达成后的群组综合评价矩阵  $E'_g$ 。

表6 共识达成后的群组综合评价矩阵  $E'_g$

$E'_g$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$A_1$	$[(0.5605, 0.6601), (0.3283, 0.4702)]$	$[(0.4767, 0.6310), (0.3321, 0.4906)]$	$[(0.6597, 0.8010), (0.3453, 0.4650)]$	$[(0.3063, 0.5073), (0.3739, 0.5980)]$	$[(0.3091, 0.4793), (0.5007, 0.6566)]$
$A_2$	$[(0.4290, 0.5842), (0.3231, 0.4795)]$	$[(0.5540, 0.7267), (0.3009, 0.4436)]$	$[(0.5099, 0.6834), (0.1358, 0.2392)]$	$[(0.3006, 0.4329), (0.4765, 0.5940)]$	$[(0.3629, 0.5671), (0.4578, 0.6152)]$
$A_3$	$[(0.5075, 0.7727), (0.4174, 0.5405)]$	$[(0.4561, 0.6044), (0.3340, 0.5102)]$	$[(0.3226, 0.4194), (0.5540, 0.7286)]$	$[(0.3970, 0.5669), (0.3492, 0.5207)]$	$[(0.4407, 0.6963), (0.3619, 0.4845)]$
$A_4$	$[(0.3580, 0.5512), (0.5482, 0.7157)]$	$[(0.4440, 0.5074), (0.2308, 0.3424)]$	$[(0.4121, 0.5546), (0.5753, 0.7176)]$	$[(0.2618, 0.4987), (0.4650, 0.6944)]$	$[(0.4784, 0.6179), (0.4216, 0.6448)]$

根据表6的群组综合评价矩阵, 结合式(23)一式(24)计算评价指标权重  $W$ , 可得

$$W = (0.2153, 0.2380, 0.2312, 0.1448, 0.1707)^T.$$

进而结合式(9)计算各方案的综合评价值, 可得:

$$F_{A_1} = [(0.5234, 0.6626), (0.3650, 0.5201)], F_{A_2} = [(0.4662, 0.6353), (0.2926, 0.4332)],$$

$$F_{A_3} = [(0.4355, 0.6409), (0.4025, 0.5590)], F_{A_4} = [(0.4092, 0.5490), (0.4230, 0.5920)].$$

步骤5: 计算各方案的得分值, 可得

$$S_{A_1} = 0.5612, S_{A_2} = 0.5628, S_{A_3} = 0.5265, S_{A_4} = 0.4877,$$

则方案排序为:

$$A_2 > A_1 > A_3 > A_4$$

因此, 方案  $A_2$  为最优方案。即, 商学院经济类专业的本科生统计设计能力最强。

### (二) 灵敏度分析

上节实例中我们假定参数  $\gamma = 2$  对方案进行排序与择优, 下面进一步讨论参数  $\gamma$  的变化对方案排序结果的影响。以基于 IVFFFWA 和 IVFFFWG 算子的信任网络群组综合评价方法为例, 分别取  $\gamma = 2, 5, 10, 20, 50, 100$ , 得到的方案排序结果列于表7。

表7 参数  $\gamma$  变化对方案排序的影响

$\gamma$	IVFFFWA	IVFFFWG
2	$A_2 > A_1 > A_3 > A_4$	$A_2 > A_3 > A_1 > A_4$
5	$A_2 > A_1 > A_3 > A_4$	$A_2 > A_3 > A_1 > A_4$
10	$A_2 > A_1 > A_3 > A_4$	$A_2 > A_3 > A_1 > A_4$
20	$A_2 > A_1 > A_3 > A_4$	$A_2 > A_1 > A_3 > A_4$
50	$A_2 > A_1 > A_3 > A_4$	$A_2 > A_1 > A_3 > A_4$
100	$A_2 > A_1 > A_3 > A_4$	$A_2 > A_1 > A_3 > A_4$

从表7可以看出, 随着参数  $\gamma$  的增大, 基于 IVFFFWA 算子的信任网络群组综合评价方法下的方案排序保持不变, 始终为  $A_2 > A_1 > A_3 > A_4$ , 最优方案都为  $A_2$ , 说明基于 IVFFFWA 算子的信任网络群组综合评价方法具有一定的稳定性, 参数  $\gamma$  的变化对方案的排序并不敏感。而基于 IVFFFWG 算子的信任网络群组综合评价方法下的方案排序存在一定的变化, 从  $A_2 > A_3 > A_1 > A_4$  到  $A_2 > A_1 > A_3 > A_4$ , 说明基于 IVFFFWG 算子的信任网络群组综合评价方法下的方案排序随参数  $\gamma$  的变化而变化, 但不管方案排序如何变化, 最优方案都为  $A_2$ 。

### (三) 对比分析

为验证本文方法(以基于 IVFFFWA 算子的信任网络群组综合评价方法为例)的可行性和优越性, 现

与其他评价方法进行对比分析。首先利用 Rani 和 Mishra (2022)<sup>[15]</sup> 提出的 IVFFWA 算子集成专家评价信息,然后根据 Wu 等(2017)<sup>[16]</sup> 提出的共识交互模型调整未达成共识的专家评价意见。假定评价专家权重与本文相同,则根据以上方法的具体计算过程如下。

首先,利用 IVFFWA 算子集成各专家的评价矩阵,可得群组综合评价矩阵  $E_g$ ,见表8。

表8 群组综合评价矩阵  $E_g$

$E_g$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$A_1$	[(0.5351,0.6343), (0.3572,0.5015)]	[(0.4780,0.6329), (0.3313,0.4866)]	[(0.6334,0.7801), (0.3702,0.4927)]	[(0.3756,0.6290), (0.3189,0.5215)]	[(0.3104,0.4831), (0.4961,0.6461)]
$A_2$	[(0.4298,0.5863), (0.3224,0.4777)]	[(0.5568,0.7299), (0.3001,0.4423)]	[(0.5106,0.6850), (0.1358,0.2392)]	[(0.3008,0.4345), (0.4724,0.5827)]	[(0.3635,0.5735), (0.4501,0.6008)]
$A_3$	[(0.5092,0.7784), (0.4163,0.5386)]	[(0.4563,0.6052), (0.3319,0.5037)]	[(0.3228,0.4198), (0.5536,0.7280)]	[(0.3976,0.5694), (0.3486,0.5197)]	[(0.4412,0.6991), (0.3602,0.4801)]
$A_4$	[(0.3472,0.5354), (0.5139,0.6669)]	[(0.4444,0.5083), (0.2305,0.3416)]	[(0.3936,0.5315), (0.5901,0.7360)]	[(0.2526,0.4797), (0.4927,0.7110)]	[(0.5573,0.6912), (0.3569,0.5879)]

其次,利用共识交互模型调整未达成共识的专家评价意见。具体如下,先计算各专家共识度,可得

$$CI^1 = 0.848, CI^2 = 0.891, CI^3 = 0.784, CI^4 = 0.865$$

其中,专家  $E_3$  的共识度  $CI^3 < \delta = 0.8$ ,专家  $E_3$  在方案和指标层面的共识度分别为:

$$CE^3 = \begin{pmatrix} 0.550 & 0.836 & 0.650 & 0.678 & 0.822 \\ 0.877 & 0.688 & 0.894 & 0.856 & 0.793 \\ 0.816 & 0.924 & 0.948 & 0.955 & 0.715 \\ 0.749 & 0.918 & 0.766 & 0.619 & 0.631 \end{pmatrix}, CA^3 = (0.707, 0.822, 0.871, 0.737)$$

进而可得需要调整的专家意见  $F_{11}^3, F_{13}^3, F_{14}^3, F_{41}^3, F_{43}^3, F_{44}^3, F_{45}^3$ 。基于 Wu 等(2017)<sup>[16]</sup> 的意见生成机制可将评价意见修改为:

$$\begin{aligned} F_{11}^3 &: [(0.1, 0.2), (0.7, 0.9)] \rightarrow [(0.4313, 0.5198), (0.5000, 0.6718)], \\ F_{13}^3 &: [(0.1, 0.3), (0.6, 0.8)] \rightarrow [(0.5152, 0.6582), (0.4713, 0.6278)], \\ F_{14}^3 &: [(0.6, 0.9), (0.1, 0.2)] \rightarrow [(0.5172, 0.8187), (0.1786, 0.3230)], \\ F_{41}^3 &: [(0.2, 0.3), (0.3, 0.4)] \rightarrow [(0.2927, 0.4522), (0.3926, 0.5165)], \\ F_{43}^3 &: [(0.2, 0.3), (0.7, 0.9)] \rightarrow [(0.3266, 0.4492), (0.6427, 0.8139)], \\ F_{44}^3 &: [(0.1, 0.2), (0.8, 0.9)] \rightarrow [(0.2048, 0.3928), (0.6278, 0.7999)], \\ F_{45}^3 &: [(0.8, 0.9), (0.1, 0.3)] \rightarrow [(0.7145, 0.8311), (0.1889, 0.4200)], \end{aligned}$$

意见修改后评价专家新的共识度为:

$$CI^1 = 0.857, CI^2 = 0.894, CI^3 = 0.836, CI^4 = 0.873$$

所有评价专家共识度均大于阈值,因此无须进一步调整,进而基于共识达成后的群组综合评价矩阵,结合评价指标权重,可得各方案的综合评价价值,

$$\begin{aligned} F_{A_1} &= [(0.5185, 0.6639), (0.3655, 0.5166)], F_{A_2} = [(0.4673, 0.6387), (0.2925, 0.4301)], \\ F_{A_3} &= [(0.4368, 0.6474), (0.3996, 0.5532)], F_{A_4} = [(0.4142, 0.5527), (0.4183, 0.5832)]. \end{aligned}$$

进而计算各方案的得分值,可得

$$S_{A_1} = 0.5613, S_{A_2} = 0.5645, S_{A_3} = 0.5304, S_{A_4} = 0.4921。$$

因此,方案排序结果为  $A_2 > A_1 > A_3 > A_4$ ,与本文方法排序结果一致,最优方案均为  $A_2$ ,说明本文方法是可行的。

通过以上对比分析可以发现,与现有方法相比,本文提出的评价方存在以下两点优势:(1)基于提出的 IVFFFWA 算子集成专家评价信息,更具灵活性和鲁棒性,专家可根据实际决策环境选择合适的参数  $\gamma$ 。此外 IVFFFWA 算子是 IVFFWA 算子的一般形式,因此适应性更为广泛;(2)本文所提出的共识交互模型考虑了专家间的信任关系对评价意见调整的影响作用,同时考虑了未达成共识的专家对不同信任专家的信任程度的影响。而共识交互模型以群组综合评价意见为意见调整方向,未考虑信任关系的影响作用。

## 七、结 论

本文研究了 IVFF 信任网络群组综合评价方法及应用,其创新点主要体现在以下几个方面:(1)考虑到专家对他人信任关系表达的偏好习惯,构造基于语言变量的信任表达方式和信任网络,进而转化为信任程度矩阵以计算专家权重;(2)利用 IVFFS 表达模糊信息的广泛性,结合 Frank 算子的灵活性和鲁棒性,提出 IVFFFWA 和 IVFFFWG 两种新的集成方法;(3)考虑到信任关系对共识达成的影响作用,提出信任共识交互模型调整专家评价意见,提高群组共识度;(4)构建了高校商科类本科生统计设计能力的评价指标体系,提出了 IVFF 熵权法获取指标权重,使得评价结果更为客观。下一阶段,笔者将在意见反馈阶段考虑未达成共识的专家对信任专家的反馈意见可能存在拒绝的情况(张恒杰等,2021)<sup>[29]</sup>,即针对专家的调整意愿设计意见调节机制,通过意见反馈和调节机制构建信任共识交互模型。

### 参考文献:

- [1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338–356.
- [2] ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20(1): 87–96.
- [3] YAGER R R. Pythagorean membership grades in multicriteria decision making[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2014, 22(4): 958–965.
- [4] SENAPATI T, YAGER R R. Fermatean fuzzy weighted averaging/geometric operators and its application in multi-criteria decision-making methods[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2019, 85: 112–121.
- [5] JEEVARAJ S. Ordering of interval-valued Fermatean fuzzy sets and its applications[J]. *Expert Systems with Applications*, 2021, 185: 115613.
- [6] 彭定洪, 杨扬. 基于毕达哥拉斯模糊 Frank 算子的多属性决策方法[J]. *计算机应用*, 2019(2): 316–322.
- [7] 刘卫锋, 常娟, 何霞. 毕达哥拉斯模糊 Hamacher 集成算子及其决策应用[J]. *系统工程理论与实践*, 2018(6): 1566–1574.
- [8] XING Y P, ZHANG R T, WANG J, et al. Some new pythagorean fuzzy Choquet-Frank aggregation operators for multi-attribute decision making[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2018, 33(11): 2189–2215.
- [9] RAHMAN K, ABDULLAH S, AHMED R, et al. Pythagorean fuzzy Einstein weighted geometric aggregation operator and their application to multiple attribute group decision making[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2017, 33(1): 1–13.
- [10] WANG W Z, LIU X W. Intuitionistic fuzzy information aggregation using Einstein operations[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, 20(5): 923–938.
- [11] ZHANG Z M. Multi-criteria group decision-making methods based on new intuitionistic fuzzy Einstein hybrid weighted aggregation operators[J]. *Neural Computing and Applications*, 2017, 28(12): 3781–3800.
- [12] LIU P D. Some Frank aggregation operators for interval-valued intuitionistic fuzzy numbers and their application to group decision making[J]. *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 2017, 29(1–2): 183–223.
- [13] RANI P, MISHRA A R. Fermatean fuzzy Einstein aggregation operators-based MULTIMOORA method for electric vehicle charging station selection[J]. *Expert Systems with Applications*, 2021, 182: 115267.
- [14] TAN J, LIU Y, SENAPATI T, et al. An extended MABAC method based on prospect theory with unknown weight information under Fermatean fuzzy environment for risk investment assessment in B&R[J]. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 2022: 1–30.
- [15] RANI P, MISHRA A R. Interval-valued Fermatean fuzzy sets with multi-criteria weighted aggregated sum product assessment-



- based decision analysis framework[J]. *Neural Computing and Applications*,2022,34(10):8051-8067.
- [16] WU J, CHICLANA F, FUJITA H, et al. A visual interaction consensus model for social network group decision making with trust propagation[J]. *Knowledge-Based Systems*,2017,122:39-50.
- [17] WU J, CHICLANA F, HERRERA-VIDEAMA E. Trust based consensus model for social network in an incomplete linguistic information context[J]. *Applied Soft Computing*,2015,35:827-839.
- [18] WU J, CHICLANA F. A social network analysis trust-consensus based approach to group decision-making problems with interval-valued fuzzy reciprocal preference relations[J]. *Knowledge-Based Systems*,2014,59:97-107.
- [19] JI Y, XU Y, QU S J, et al. A novel twostage multicriteria decisionmaking method based on intervalvalued Pythagorean fuzzy aggregation operators with selfconfidence levels[J]. *Arabian Journal for Science and Engineering*,2020,46(2):1561-1584.
- [20] TIAN Z P, NIE R X, WANG J Q, et al. A two-fold feedback mechanism to support consensus-reaching in social network group decision-making[J]. *Knowledge-Based Systems*,2018,162:74-91.
- [21] WU J, CHANG J L, CAO Q W, et al. A trust propagation and collaborative filtering based method for incomplete information in social network group decision making with type-2 linguistic trust[J]. *Computers & Industrial Engineering*,2019,127:853-864.
- [22] 向南, 豆亚杰, 姜江, 等. 基于专家信任网络的不完全信息武器选择决策[J]. *系统工程理论与实践*,2021(3):759-770.
- [23] 金飞飞, 刘金培, 陈华友, 等. 基于信任关系和信息测度的概率语义社会网络群决策模型[J]. *中国管理科学*,2021(10):178-190.
- [24] LIU Y, LIANG C, CHICLANA F, et al. A trust induced recommendation mechanism for reaching consensus in group decision making[J]. *Knowledge-Based Systems*,2017,119:221-231.
- [25] 周晓阳, 王黎琴, 冯平平, 等. WSR 方法论视角下基于信任关系、前景理论和犹豫模糊偏好的群决策研究[J]. *管理评论*,2020(7):66-75.
- [26] 徐刘靖, 沈婷婷. 高校图书馆员数据素养内涵及培养机制研究[J]. *图书馆建设*,2016(5):89-94.
- [27] 惠恭健, 曾磊. 智能时代的数据素养:模型构建、指标体系与培养路径——基于国内外模型比较分析[J]. *远程教育杂志*,2021(4):52-61.
- [28] 钱瑛, 徐绪堪, 朱昌平, 等. 面向图书情报专业硕士的数据素养能力评价指标体系构建[J]. *情报理论与实践*,2022(10):62-68.
- [29] 张恒杰, 王芳, 董庆兴, 等. 群体共识决策的研究进展与展望[J]. *电子科技大学学报(社会科学版)*,2021(2):26-37.



(责任编辑 郭宝才 王 权)