第5期(总第355期)
2021年5月

商 业 经 济 与 管 理
JOURNAL OF BUSINESS ECONOMICS

No. 5 (General No. 355)
May 2021

基于Heston's SV模型下带有违约风险的最优再保险—投资策略

陈振龙[1],苑伟杰[1],夏登峰[2]

(1. 浙江工商大学 统计与数学学院,浙江 杭州 310018;
2. 安徽工程大学 金融工程系,安徽 芜湖 241000)

摘　要: 对于模糊厌恶型保险公司,在可违约金融市场中,考虑其比例再保险—投资问题。假设在任意时刻保险公司可购买比例再保险和投资无风险资产、风险资产和可违约债券,其中风险资产价格服从Heston's SV (Heston's Stochastic Volatility) 模型。首先,考虑模型不确定性,采用与参考模型概率测度等价的概率测度描述替代模型。利用Girsanov变换得到保险公司在替代模型下的财富过程,并通过动态规划原理建立了相应的HJB (Hamilton-Jacob-Bellman) 方程,其中,文章用含状态依赖的不同偏好参数度量模型不确定性的模糊度。其次,分别在违约前和违约后的情况下,针对CARA (Constant Absolute Risk Aversion) 效用函数求解HJB方程,得到了最优稳键的再保险—投资策略,并给出了数值模拟和经济学解释。结果表明:相比较使用同一偏好参数的模型结果,文章的最优策略的表达式更精确,考虑的模型更符合实际金融环境。

关键词: 模糊厌恶型保险公司;Heston's SV模型;可违约债券;动态规划原理;稳键的再保险—投资

中图分类号: F830.9,O211.63　**文献标志码:** A　**文章编号:** 1000-2154(2021)05-0056-15

DOI:10.14134/j.cnki.cn33-1336/f.2021.05.005

Optimal Reinsurance and Investment Based on Heston's SV Model in Defaultable Market

CHEN Zhenlong[1], YUAN Weijie[1], XIA Dengfeng[2]

(*1. School of Statistics and Mathematics, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China;*
2. Department of Financial Engineering, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000, China)

Abstract: For an ambiguity-averse insurer (AAI), the robust optimal reinsurance and investment strategy problem in the defaultable financial market is studied in this research. We assume that the insurer is allowed to purchase proportional reinsurance and to invest on a risk-free asset, a risky asset and a defaultable bond at any time, where the price process of the risky asset follows the Heston's stochastic volatility model. Firstly, in the case of model uncertainty, the probability measure equivalent to the probability measure of the reference model is used to describe the alternative model. The wealth process of the insurer under the alternative model is obtained by Girsanov transformation, and the corresponding Hamilton-Jacob-Bellman equation, which measures the ambiguity degree of model uncertainty with different preference parameters with state dependence, is established by dynamic programming approach. Then, the closed-form expressions of the optimal reinsurance and investment strategy is derived by solving Hamilton-Jacob-Bellman equation with the CARA utility function in the pre-default case and post-default case, respectively. And, the numerical

收稿日期: 2020-12-12

基金项目: 浙江省自然科学基金项目"中国金融系统性风险度量与优化研究——基于变点检测的藤copula分组模型"(LY21G010003);教育部人文社会科学研究规划基金项目"基于藤Copula分组模型的金融机构风险度量、优化及识别研究"(18YJA910001);国家自然科学基金项目"向量值随机场与随机偏微分方程组的分形性质及应用"(11971432);浙江省重点建设高校优势特色学科(浙江工商大学统计学)

作者简介: 陈振龙,男,教授,博士生导师,理学博士,主要从事随机过程与风险管理研究;苑伟杰(通讯作者),男,博士研究生,主要从事随机过程与风险管理研究;夏登峰,男,教授,工学博士,主要从事金融数学与金融工程研究。

simulation and its economic analysis are given. The results show that, compared with the model results using the same preference parameter, the expression of our optimal strategy is more accurate, and the model considered is more consistent with the actual financial environment.

Key words: ambiguity-averse insurer; Heston’s SV model; defaultable bond; dynamic programming approach; robust reinsurance and investment

一、引　言

保险公司的最优再保险—投资问题一直是当今保险精算领域的研究热点，这主要是由于再保险可以有效分散巨额索赔风险，投资能使保险公司有效地管理盈余，实现财富价值最大化。在不同的目标函数下，学者们研究了保险公司的最优再保险—投资策略。比如，Browne[1]，Yang 和 Zhang[2]，Wang[3] 等分别通过扩散模型、跳扩散模型和纯跳过程模型，研究了终端财富指数效用最大化下保险公司的最优投资策略。Schmidli[4]，Chen 等[5] 和 Bi 和 Zhang[6] 研究了在不同市场和模型下，以破产概率最小化为目标的保险公司最优策略问题。Bäuerle[7]，Zeng 等[8] 在均值—方差准则下考虑了保险公司的最优再保险—投资问题。关于其他结果可参阅相关文献[9-10]。

近年来，随着许多学者对金融风险理论与投资环境的深入研究，发现随机波动率能更好地解释股票价格的波动率微笑、收益分布厚尾性等特征。其中，Heston[11] 于1993年提出风险资产波动率应由 CIR（Cox-Ingersoll-Ross）随机过程驱动更符合实际金融市场，该模型也被称为 Heston’s SV 模型。之后，Kraft[12] 和 Liu[13] 研究了 Heston’s SV 模型下的最优投资组合问题。而 Li 等[14]，Huang 等[15] 分别在不同的金融市场假设中，考虑了 Heston’s SV 模型下保险公司的最优比例再保险和投资问题。

然而，在一般的金融市场假设中很少有学者考虑可违约资产问题。实际上，可违约公司债券虽然存在违约风险，但因为有相对较高的收益率而备受保险公司投资青睐。因此，考虑保险公司在可违约资产上的投资具有重要意义。其中，Bielecki 和 Jang[16] 研究了具有债券、风险资产和可违约资产的最优投资组合问题。Zhu 等[17] 研究了在可违约金融市场中的最优再保险—投资问题，而 Ma 等[18] 在此基础上考虑了可违约金融市场中基于 CEV（Constant Elasticity of Variance）模型下的最优投资—再保险问题。此外，Zhao 等[19]，Zhang 和 Chen[20]，Li 和 Geng[21] 在均值—方差准则下分别考虑了基于 GBM（Geometric Brownian Motion）模型、CEV 模型和 Heston’s SV 模型下带有违约风险的最优投资—再保险问题。张永涛等[22] 研究了在违约风险下，同时考虑保险公司与再保险公司利益的最优再保险与投资问题。但这些文献大都研究的是模糊中性的保险公司（Ambiguity Neutral Insurer，ANI）。

但在现实中，由于投资者进行最优投资组合时的风险选择偏好和模型的选择并不一致，且模型难免会出现误差。因此，Anderson 等[23] 将模糊厌恶的概念引入了 Lucas 模型。而 Uppal 和 Wang[24] 在此基础上制定了一个允许投资者考虑模糊程度的框架。Maenhout[25] 研究了带有模糊不确定性的最优跨期消费问题。之后，Maenhout[26] 在研究模型不确定性和随机溢价下的最优投资组合问题时，提出了一种度量模型不确定性定量效应的方法。Flor 和 Larsen[27] 在此基础上采用不同的状态偏好参数来刻画模型不确定性的模糊度，进一步推广了度量模型不确定性定量效应的方法。而 Yi 等[28] 则考虑了模糊厌恶型保险公司（Ambiguity-Averse Insurer，AAI）的最优投资与再保险策略。Sun 等[29] 在 Zhu 等[17]、Zhao 等[19] 的基础上，考虑了 GBM 模型下 AAI 在可违约市场中的最优投资与再保险策略，但没有考虑风险资产价格波动率的随机性。此外，其他相关结果可参阅文献[30-34]。

本文受 Sun 等[29]、Zhu 等[17] 的启发，在可违约金融市场中，将基于 Heston’s SV 模型研究模糊厌恶型保险公司在指数效用下的稳健最优再保险—投资策略。该研究不仅考虑了风险价格波动率的随机性，而且考虑了扩散风险和跳跃风险引起的模型不确定性。此外，当保险公司的效用采用 CARA 效用函数时，Heston’s SV 模型可能会产生一个无限的值函数（幂函数效用也有这个缺陷）。类似 Yi 等[28] 的研究方法，可以通过在模型参数上强加一些技术条件来寻找一个在数学上可处理的框架。因此，在 CARA 效用下，AAI 就可以考虑模型的不确定性，并寻求稳健的最优策略。本文假设金融市场由无风险资产、价格服从

Heston's SV 模型的风险资产和可违约债券三部分组成,对于模糊厌恶型保险公司,用含状态依赖的不同偏好参数度量模型不确定性的模糊度,通过等价鞅变换转化为稳健的最优控制问题,并分别在违约前和违约后两种情况下,针对 CARA 效用函数,建立 HJB 方程并求解,得出了最优的再保险—投资策略,最后进行数值模拟,并给出相应的经济学解释。

本文剩余部分安排如下:第2部分主要在可违约金融市场中,针对 AAI 建立可违约金融市场模型,并利用 Girsanov 变换得到模糊厌恶型保险公司的等价财富方程;第3部分在稳健控制下,以终端财富期望效用最大化为目标,分别给出了违约前和违约后情况下的最优再保险—投资策略;第4部分进行数值模拟并给出经济解释;第5部分对全文进行总结。

二、模型建立

本文假设金融市场是无摩擦的且具有一个完备的信息流,其中无摩擦是指保险公司可以连续交易,交易中不涉及交易成本或税收。在此假设下,本文考虑连续时间下的可违约金融市场模型,其中金融市场是由无风险资产、风险资产和可违约公司债券组成。对于完备的信息流,其相关符号记作如下:设$(\Omega,\mathcal{F},\{F\}_{t\in[0,T]},P)$是一个完备的带流概率空间,其中$\{F\}_{t\in[0,T]}$由三个一维标准布朗运动$\{W^S(t)\}$、$\{W^M(t)\}$、$\{W^R(t)\}$生成,且$\{W^R(t)\}$独立于$\{W^S(t)\}$和$\{W^M(t)\}$,常数 $T>0$表示终端时刻。

(一) 保险公司的盈余过程

假设保险公司的索赔过程 $C(t)$服从如下动态方程:

$$dC(t)=adt-bdW^R(t),$$

其中,$a,b>0$为常量,分别表示为单位时间平均索赔额和索赔波动率。

并假设保险公司连续收取的保险费率为 $\zeta_0=(1+\mu)a$,其中 $\mu>0$为保险公司的安全负荷。于是在无再保险和投资的情况下,保险公司的盈余过程为:

$$dR_0(t)=\zeta_0dt-dC(t)=\mu adt+bdW^R(t).$$

假设保险公司可以购买比例再保险或获得新业务(例如,作为其他保险公司的再保险人)。那么,可记 $q(t)\in[0,+\infty)$为 t 时刻的风险暴露值,我们称风险暴露过程$\{q(t):t\in[0,T]\}$为再保险策略。当 $q(t)\in(1,+\infty)$时,意味着获得新业务。当 $q(t)\in[0,1]$时,它相当于比例再保险。这意味着如果索赔发生,保险公司将承担其中的$100q(t)\%$部分,剩余的比例则由再保险公司承担。若保险公司连续支付再保险费率为 $\zeta_1=(1+\eta)\Big(1-q(t)\Big)a$,$\eta\geqslant\mu>0$为再保险公司的相对安全负荷。此时盈余过程为:

$$\begin{aligned}dR(t)&=\zeta_0dt-q(t)dC(t)-\zeta_1dt\\&=(1+\mu)adt-q(t)dC(t)-(1+\eta)\Big(1-q(t)\Big)adt\\&=\Big(\lambda+\eta q(t)\Big)adt+bq(t)dW^R(t),\end{aligned}$$

其中,$\lambda=\mu-\eta$。

(二) 金融市场的模型假设

假设金融市场存在一种无风险资产,一种风险资产和一种可违约债券,且无风险资产价格 $S_0(t)$满足如下过程:

$$dS_0(t)=r_0S_0(t)dt, \tag{2.1}$$

式中,常数 $r_0>0$表示无风险利率。

对于风险资产价格 $S_1(t)$服从 Heston's SV 模型:

$$\begin{cases}dS_1(t)=S_1(t)\Big[\Big(r_0+\xi V(t)\Big)dt+\sqrt{V(t)}dW^S(t)\Big],\\dV(t)=k\Big(\theta-V(t)\Big)dt+\sigma\sqrt{V(t)}dW^M(t).\end{cases} \tag{2.2}$$

其中,常数 $\xi>0$为波动溢价,$V(t)$是 CIR 过程。$S_1(0)=s_1>0$,$V(0)=v_0>0$,$k>0$为 $V(t)$的均值回归率,$\theta>0$为 $V(t)$的长期均值,$\sigma>0$为 $V(t)$的波动率。我们需要$2k\theta\geqslant\sigma^2$,以确保 $V(t)$是非负的。假设$\{W^S(t)\}$、$\{W^M(t)\}$线性相关,且相关系数为$\rho_0\in[-1,1]$,根据标准高斯线性回归,$\{W^M(t)\}$、$\{W^S(t)\}$有如下关系 :

$$\rho_0 dW^S(t)+\rho dW^V(t)=dW^M(t),$$

式中,$\rho_0^2+\rho^2=1$,且$\{W^V(t)\}$是与$\{W^S(t)\}$、$\{W^R(t)\}$均独立的标准布朗运动。

下面本文将考虑一个到期日为 T_1的可违约零息债券,$\zeta\in[0,1]$是债券的损失率,非负的随机变量 τ 是违约时刻,在大多数基于强度的模型中,τ 表示强度为 h^P 的泊松过程第一次跳的时刻。对于 $t\geqslant0$,定义一个违约示性函数过程 $Z(t)=I_{\{\tau\leqslant t\}}$,记 $D(t)=\sigma\{Z(u),0\leqslant u\leqslant t\}$和 $G(t)=F_t\vee D(t)$,则 $G=\{G(t),t\geqslant0\}$是包含 τ 的最小 σ 域流。则根据 Bielecki 和 Jang[16], 违约过程可以定义为:

$$M^P(t)\coloneqq Z(t)-\int_0^t\Big(1-Z(u)\Big)h^P du,$$

则该违约过程在(P,G)上是一个鞅。记 Q 是与 P 等价的风险中性鞅概率测度,根据无套利原理,当违约时,债券持有者可以得到$(1-\zeta)E^Q[e^{-r(T_1-\tau)}]$,通过 Girsanovs 定理(Bielecki 和 Jang[16]引理2),则在 Q 测度下的违约强度 $h^Q=h^P/\Delta$,其中$1/\Delta$ 为违约事件的风险溢价,则由文献 Bielecki 和 Jang[16]引理3可得如下引理:

引理2.1　对于利率 $r_0>0$,在 P 测度下的可违约公司债券的动态价格过程为:

$$dp(t,T_1)=p(t-,T_1)\left(r_0dt-\Big(1-Z(t)\Big)\delta(1-\Delta)dt-\Big(1-Z(t-)\Big)\zeta dM^P(t)\right),$$

其中,$\delta=\zeta h^Q$ 表示风险中性测度下的债券息差。

(三) 财富过程

在本部分,本文构造保险公司的财富方程。首先,假设保险公司在自融资情况下进行再保险—投资,其投资策略可以由一个三维随机过程 $\pi=\{q(t),\pi_1(t),\pi_2(t),t\in[0,T]\}$来表示,其中 $q(t)$表示风险暴露值,$\pi_1(t)$表示在 t 时刻投资于风险资产的资金额,$\pi_2(t)$表示在 t 时刻投资于可违约债券的资金额,剩余的资金投资无风险资产。本文假设公司债券在违约后不进行交易,且投资期限为$[0,T]$,$T<T_1<\infty$,则财富过程 $X^\pi(t)$服从如下随机微分方程:

$$\begin{aligned}dX^\pi(t)&=\frac{X^\pi(t)-\pi_1(t)-\pi_2(t)}{S_0(t)}dS_0(t)+\frac{\pi_1(t)}{S_1(t)}dS_1(t)+\frac{\pi_2(t)}{p(t-)}dp(t)+dR(t)\\&=\left[a\lambda+a\eta q(t)+X^\pi(t)r_0+\xi V(t)\pi_1(t)+\pi_2(t)\delta\Big(1-Z(t)\Big)\right]dt+\\&\quad bq(t)dW^R(t)+\pi_1(t)\sqrt{V(t)}dW^S(t)+\pi_2(t)\zeta\Big(1-Z(t)\Big)dZ(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

其中,$X^\pi(0)=x_0$为初始财富。与文献 Sun 等[29]、Zhao 等[19]、Ma 等[18]、Yi 等[28]相比较而言,本文在保险公司的财富方程构造中,不仅考虑了风险价格波动率的随机性,而且考虑了现实投资环境中存在的可违约资产。

(四) 稳健的最优控制问题

假设保险公司追求终端财富指数效用最大化,其 CARA 效用函数如下:

$$U(x)=-\frac{1}{m}e^{-mx},\tag{2.4}$$

其中,常数 $m>0$为绝对风险厌恶系数。

在传统再保险—投资模型中,保险公司一般假设为模糊中性的,其目标函数为:

$$\sup_{\pi\in\tilde{\Pi}}E^P\left[U\Big(X^\pi(T)\Big)\right]=\sup_{\pi\in\tilde{\Pi}}E^P\Big[-\frac{e^{-mX^\pi(T)}}{m}\Big],\tag{2.5}$$

其中,$\tilde{\Pi}$ 表示在测度 P 下所有的可行策略 π 的集合。E^P 表示在概率测度 P 下的期望。此外,本文称 P 为参考模型或参考概率测度,而概率测度 P 是通过统计方法估计出来的,显然不完全准确。这就导致保险公司对概率测度 P 的估计存在模糊性。

然而,本文主要考虑的对象是模糊厌恶型保险公司,由于此类保险公司对于模型的模糊性是厌恶的,故而他们更愿意接受稳健的再保险—投资策略,进而以降低因随机动态模型的参数估计错误而造成的风险。本文根据 Anderson 等[23]和 Yi 等[28]文献的方法,通过考虑替代模型和保险公司的偏好参数来解决此问题。下面本文将按照这种方法来构造模型不确定性下的相应数学模型。首先,本文记 Θ 为所有与概率测度 P 等价的替代模型概率测度 P^*的集合:

$$\Theta := \{P^* | P^* \sim P\}.$$

在此基础上,可行策略集的定义如下:

定义2.1 策略 $\pi = \{q(t), \pi_1(t), \pi_2(t), t \in [0,T]\}$ 称为可行策略,假如它满足:

(1)π 是循序可测的,且 $E^{\hat{P}^*}\left[\int_0^T \|\pi\|^2 dt\right] < \infty$,其中$\|\pi\|^2 = \pi_1^2(t) + \pi_2^2(t) + q^2(t)$;

(2) 对任意 $t_0 \in [0,T]$,及任意$(x_0, v_0) \in R \times R^+$,式(2.3)有唯一解$\{X^\pi(t), t \in [0,T]\}$且满足 $E^{\hat{P}^*}_{t_0, x_0, v_0}[e^{-mX^\pi(t)}] < \infty$,其中 $E^{\hat{P}^*}_{t,X,V}[\cdot] = E^{\hat{P}^*}[\cdot | X(t) = x, V(t) = v]$,$\hat{P}^*$表示最坏情形发生时(对于 AAI 满意时的情况)选择的概率测度。记 $\Pi = \{\pi(t), t \in [0,T]\}$ 为在测度 $\hat{P}^*$ 下的可行策略集。

根据 Girsanov 理论,可得每一个 $P^* \in \Theta$ 都存在一个循序可测的过程 $\varphi(t) = \Big(h(t), g(t), f(t), j(t)\Big)$ 使得 $dP^*/dP = \Lambda(T)$,其中,

$$\Lambda(t) = \exp\Big\{-\int_0^t h(s)dW^S + g(s)dW^V + f(s)dW^R - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)^2 + g(s)^2 + f(s)^2 ds + \int_0^t \ln j(s)dZ(s) + h^p\int_0^t \Big(1 - j(s)\Big)\Big(1 - Z(s)\Big)ds\Big\}$$

$\Lambda(0) = 1$, $P - a.s.$. 可参考 Karatzas 和 Shreve[35]、Yi 等[28]文献。此外,如果 $\varphi(t) = \Big(h(t), g(t), f(t), j(t)\Big)$ 满足 Novikov 条件:

$$E^P\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \Big(h(s)^2 + g(s)^2 + f(s)^2 + 2h^p\Big(j(s) - 1\Big)\Big(1 - Z(s)\Big)\Big)ds\right)\right] < \infty.$$

则 $\Lambda(t)$ 是一个 P- 鞅,且 $E^P[\Lambda(T)] = 1$。在概率测度 $P^* \in \Theta$ 下,上式中的标准布朗运动转换为:

$$dW^S_{P*}(t) = dW^S(t) + h(t)dt,$$
$$dW^V_{P*}(t) = dW^V(t) + g(t)dt,$$
$$dW^R_{P*}(t) = dW^R(t) + f(t)dt.$$

其中,$dW^S_{P*}(t)$,$dW^V_{P*}(t)$,$dW^R_{P*}(t)$ 在测度 P^*下是标准布朗运动,且泊松过程的强度变为$j(t)h^P$,因此,可得在测度 P^* 下的财富过程为:

$$dX^\pi(t) = \Big[a\lambda + a\eta q(t) + X^\pi(t)r_0 + \xi V(t)\pi_1(t) - bq(t)f(t) + \pi_2(t)\Big(1 - Z(t)\delta\Big) - \pi_1(t)\sqrt{V(t)}h(t)\Big]dt + bq(t)dW^R_{P*}(t) + \pi_1(t)\sqrt{V(t)}dW^S_{P*}(t) - \pi_2(t)\Big(1 - Z(t)\Big)\zeta dZ(t).$$

对于 AAI 保险公司需要选择一个模型来考虑稳健的再保险 — 投资策略,而参考模型是保险公司根据经验和检验给出的,虽仍存在模糊性,但能很好地描述真实模型,具有参考价值。所以保险公司会惩罚任何偏离参考模型的模型,且惩罚随着偏差的增加而增加。本文为了考虑替代模型和参考模型之间的差异,引入相对熵来度量测度 P 和 P^*之间的偏差,其相对熵为:

$$\frac{1}{2}\left(h(t)^2+g(t)^2+f(t)^2\right)dt+\left(j(t)\ln j(t)-j(t)+1\right)h^P\left(1-Z(t)\right)dt.$$

根据 Flor 和 Larsen[27],Sun 等[29],为了减少替代模型与参考模型的偏离程度,需要引入一个惩罚项,当替代模型偏离参考模型的时候,效用函数就会得到一个惩罚来纠正偏差,则添加惩罚项后,式(2.5)可被修正为稳健性控制问题:

$$\sup_{\pi\in\Pi}\inf_{P\in\Theta}E^{P^*}\left\{-\frac{1}{m}e^{-mX^\pi(T)}+\int_0^T\psi\left(t,X^\pi(t),\varphi(t),Z(t)\right)dt\right\}. \tag{2.6}$$

其中:$\psi\left(t,X^\pi(t),\varphi(t),Z(t)\right)=\frac{h(t)^2}{2\phi_1(t)}+\frac{g(t)^2}{2\phi_2(t)}+\frac{f(t)^2}{2\phi_3(t)}+\frac{\left(j(t)\ln j(t)-j(t)+1\right)h^P\left(1-Z(t)\right)}{\phi_4(t)}$,

对非负数 $\phi_i(t)\geqslant0,i=1,2,3,4$ 分别表示 AAI 对风险资产价格过程、风险资产波动率过程、保险商盈余过程以及可违约债券价格过程的风险偏好参数。$\phi_i(t)$ 越大,偏离参考模型的惩罚就越小,保险公司对参考模型的信心就越低,AAI 满意的最坏情况模型就越偏离参考模型。

三、最优再保险 — 投资控制策略

在本节中,本文主要利用随机最优控制理论,分别在违约前 $z=0$ 和违约后 $z=1$ 两种情况下,获得了 AAI 的最优再保险 — 投资策略。首先,为了求解式(2.6)的最优稳健控制问题,本文利用随机最优控制理论,定义值函数如下:

$$J(t,x,v,z)=\sup_{\pi\in\Pi}\inf_{P^*\in\Theta}E^{P^*}_{t,x,v,z}\left[-\frac{1}{m}e^{-mX^\pi(T)}+\int_t^T\left(\frac{h(s)^2}{2\phi_1(s)}+\frac{g(s)^2}{2\phi_2(s)}+\frac{f(s)^2}{2\phi_3(s)}+\frac{(j(s)\ln j(s)-j(s)+1)h^P(1-Z(s))}{\phi_4(s)}\right)ds\,\middle|\,X^\pi_{(t)}=x,V(t)=v,Z(t)=z\right]$$

其中,inf 表示保险公司对模型的模糊性是厌恶的,sup 表示模糊厌恶型保险商在稳健的概率测度下找到最优的再保险 — 投资策略。本文在稳健控制下,以终端财富期望效用最大化为目标,寻找最优再保险 — 投资策略 $\pi^*\in\Pi$,根据动态规划原理,可得到值函数满足的 HJB 方程为:

$$\begin{aligned}\sup_{\pi\in\Pi}\inf_{f,g,h,j}\Big\{&J_t+(a\lambda+a\eta q+xr_0+\xi v\pi_1-bqf-\pi_1\sqrt{v}h)J_x+[k(\theta-v)-\sigma\sqrt{v}\rho_0h\\&-\sigma\sqrt{v}\rho g]J_v+\frac{1}{2}(\pi_1^2v+b^2q^2)J_{xx}+\pi_1\sigma v\rho_0J_{xv}+\frac{1}{2}\sigma^2vJ_{vv}+jh^P(1-z)\\&[J(t,x-\pi_2\zeta,v,1-z)-J(t,x,v,z)]+\frac{h^2}{2\phi_1}+\frac{g^2}{2\phi_2}+\frac{f^2}{2\phi_3}+\\&\frac{(j\ln j-j+1)h^P(1-z)}{\phi_4}\Big\}=0.\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中,边界条件为:$J(T,x,v,z)=-e^{-mx}/m$。上式中 $J_t,J_x,J_v,J_{xv},J_{xx},J_{vv}$ 分别为值函数对时间 t,财富 x 及波动率 v 的一阶、二阶偏导及混合偏导。

此外,为了定量分析,采用 Flor 和 Larsen[27] 和 Sun 等[29] 中的假设,选取偏好参数 $\phi_i(t)$ 的形式如下:

$$\phi_i(t)=-\frac{\beta_i}{mJ(t,x,v,z)}\geqslant0,i=1,2,3,4,$$

其中,$\beta_i\geqslant0,i=1,2,3,4$,分别是描述 AAI 对风险资产价格过程、风险资产波动率过程、保险商盈余过程以及可违约债券价格过程的模糊厌恶系数。

因为 $z=0$ 或者 $z=1$,故考虑两种情况:

$$J(t,x,v,z)=\begin{cases}J(t,x,v,0),\text{违约前},\\J(t,x,v,1),\text{违约后}.\end{cases}$$

(一) 违约后

首先考虑 $z=1$ 的违约后情况,此时的 HJB 方程为:

$$\sup_{\pi\in\Pi}\inf_{f,g,h,j}\Big\{J_t(t,x,v,1)+(a\lambda+a\eta q+xr_0+\xi v\pi_1-bqf-\pi_1\sqrt{v}h)J_x(t,x,v,1)+$$
$$[k(\theta-v)-\sigma\sqrt{v}\rho_0h-\sigma\sqrt{v}\rho g]J_v(t,x,v,1)+\frac{1}{2}(\pi_1^2v+b^2q^2)J_{xx}(t,x,v,1)+$$
$$\pi_1\sigma v\rho_0J_{xv}(t,x,v,1)+\frac{1}{2}\sigma^2vJ_{vv}(t,x,v,1)+\frac{h^2}{2\phi_1}+\frac{g^2}{2\phi_2}+\frac{f^2}{2\phi_3}\Big\}=0.$$

其边界条件为 $J(T,x,v,1)=-e^{-mx}/m$。

下面本文将给出在 $z=1$ 的违约后情况下,AAI 的最优再保险 — 投资策略结果。

定理 3.1 设模型满足以上假设条件,在 $z=1$ 的违约后情况下,模糊厌恶型保险公司最优再保险 — 投资策略为:

$$q^*(t)=\frac{a\eta}{b^2(m+\beta_3)e^{r_0(T-t)}},$$
$$\pi_1^*(t)=\frac{[2k_2+(k_1+k_2)(e^{k_2(T-t)}-1)]m\xi+(m+\beta_1)(e^{k_2(T-t)}-1)\sigma\rho_0k_3}{[2k_2+(k_1+k_2)(e^{k_2(T-t)}-1)](m+\beta_1)me^{r_0(T-t)}},$$
$$\pi_2^*(t)=0.$$

其中,k_1,k_2,k_3 满足式(3.5)。

证明:根据式(2.4)的指数效用函数以及边界条件,本文猜测在 $z=1$ 的违约后情况下,值函数为如下形式:

$$J(t,x,v,1)=-\frac{1}{m}\exp\{-mxe^{r_0(T-t)}+A(t)+B(t)v\},$$

其中,$A(\cdot)$ 和 $B(\cdot)$ 都是关于 t 的函数,由边界条件 $J(T,x,v,1)=U(x)$,可以得到 $A(T)=0$ 和 $B(T)=0$,于是 $J(t,x,v,1)$ 对变量 t,x,v 求一阶、二阶偏导及混合偏导得:

$$J_t(t,x,v,1)=[r_0mxe^{r_0(T-t)}+A'(t)+B'(t)v]J(t,x,v,1),$$
$$J_v(t,x,v,1)=B(t)J(t,x,v,1),$$
$$J_x(t,x,v,1)=-me^{r_0(T-t)}J(t,x,v,1),$$
$$J_{vv}(t,x,v,1)=B^2(t)J(t,x,v,1),$$
$$J_{xx}(t,x,v,1)=m^2e^{2r_0(T-t)}J(t,x,v,1),$$
$$J_{xv}(t,x,v,1)=(-mB(t)e^{r_0(T-t)})J(t,x,v,1).$$

其中,$A'(t)$ 和 $B'(t)$ 是关于 t 的导数。则 $z=1$ 时的 HJB 方程可化为:

$$\sup_{\pi\in\Pi}\inf_{f,g,h,j}\Big\{\Big(r_0mxe^{r_0(T-t)}+A'(t)+B'(t)v\Big)-(a\lambda+a\eta q+xr_0+\xi v\pi_1-bqf-\pi_1\sqrt{v}h)$$
$$me^{r_0(T-t)}+[k(\theta-v)-\sigma\sqrt{v}\rho_0h-\sigma\sqrt{v}\rho g]B(t)+\frac{1}{2}m^2e^{2r_0(T-t)}(\pi_1^2v+b^2q^2)$$
$$-\pi_1\sigma v\rho_0mB(t)e^{r_0(T-t)}+\frac{1}{2}\sigma^2vB^2(t)-\Big(\frac{mh^2}{2\beta_1}+\frac{mg^2}{2\beta_2}+\frac{mf^2}{2\beta_3}\Big)\Big\}=0. \tag{3.2}$$

下面求解式(3.2)的最优控制。对式(3.2)大括号中函数关于 h,g,f 求偏导,由一阶条件可得:

$$\begin{cases}h^*(t)=\dfrac{\beta_1\sqrt{v}\xi}{m+\beta_1},\\ g^*(t)=\dfrac{-\sigma\sqrt{v}\rho B(t)\beta_2}{m},\\ f^*(t)=\dfrac{a\eta\beta_3}{b(m+\beta_3)}.\end{cases} \tag{3.3}$$

其中，漂移项 h^*, g^*, f^* 对应于最坏情形，对于 AAI 其最优策略是在这种情况下得出。将式(3.3)代入 HJB 方程(3.2)，再对策略 $\pi = \{q(t), \pi_1(t), \pi_2(t)\}$ 求偏导得最优再保险 — 投资策略为：

$$q^*(t) = \frac{a\eta}{b^2(m+\beta_3)e^{r_0(T-t)}}, \pi_1^*(t) = \frac{m\xi + (m+\beta_1)\sigma\rho_0 B(t)}{(m+\beta_1)me^{r_0(T-t)}}, \pi_2^*(t) = 0. \tag{3.4}$$

将式(3.3)和(3.4)代入式(3.2)分离变量得到：

$$\left[A'(t) - a\lambda m e^{r_0(T-t)} - \frac{a^2\eta^2 m}{2b^2(m+\beta_3)} + k\theta B(t)\right] + \left[B'(t) + \frac{\sigma^2\rho^2(m+\beta_2)}{2m}B^2(t) - (\xi\sigma\rho_0 + k)B(t) - \frac{\xi^2 m}{2(m+\beta_1)}\right]v = 0.$$

于是有：

$$A'(t) - a\lambda m e^{r_0(T-t)} - \frac{a^2\eta^2 m}{2b^2(m+\beta_3)} + k\theta B(t) = 0,$$

$$B'(t) + \frac{\sigma^2\rho^2(m+\beta_2)}{2m}B^2(t) - (\xi\sigma\rho_0 + k)B(t) - \frac{\xi^2 m}{2(m+\beta_1)} = 0,$$

应用边界条件 $A(T) = 0, B(T) = 0$，可得：

$$A(t) = -\frac{a^2\eta^2 m}{2b^2(m+\beta_3)}(T-t) - \frac{am\lambda}{r_0}[e^{r_0(T-t)} - 1] + \frac{2km\theta}{\sigma^2\rho^2(m+\beta_2)}\left(\frac{2k_2 e^{\frac{1}{2}(k_1+k_2)(T-t)}}{2k_2 + (k_1+k_2)(e^{k_2(T-t)} - 1)}\right),$$

$$B(t) = \frac{e^{k_2(T-t)} - 1}{2k_2 + (k_1+k_2)(e^{k_2(T-t)} - 1)}k_3.$$

其中，

$$k_1 = \xi\sigma\rho_0 + k, k_2 = \sqrt{(\xi\sigma\rho_0 + k)^2 + \xi\rho^2\sigma^2\frac{m+\beta_2}{m+\beta_1}}, k_3 = \frac{-m\xi^2}{m+\beta_1}. \tag{3.5}$$

于是在 $z = 1$ 的违约后情况下，模糊厌恶型保险公司的最优再保险 — 投资策略可得，证毕。

（二）违约前

在违约前情形下，即 $z = 0$ 时，相应 HJB 方程为：

$$\begin{aligned}\sup_{\pi\in\Pi}\inf_{f,g,h,j}\Big\{&J_t(t,x,v,0) + (a\lambda + a\eta q + xr_0 + \xi v\pi_1 + \pi_2\delta - bqf - \pi_1\sqrt{v}h)J_x(t,x,v,0) + \\ &[k(\theta - v) - \sigma\sqrt{v}\rho_0 h - \sigma\sqrt{v}\rho g]J_v(t,x,v,0) + \frac{1}{2}(\pi_1^2 v + b^2q^2)J_{xx}(t,x,v,0) + \\ &\pi_1\sigma v\rho_0 J_{xv}(t,x,v,0) + [J(t,x-\pi_2\zeta,v,1) - J(t,x,v,0)]jh^P + \\ &\frac{1}{2}\sigma^2 v J_{vv}(t,x,v,0) + \frac{h^2}{2\phi_1} + \frac{g^2}{2\phi_2} + \frac{f^2}{2\phi_3} + \frac{(j\ln j - j + 1)h^P}{\phi_4}\Big\} = 0.\end{aligned}$$

其边界条件为 $J(T,x,v,0) = -e^{-mx}/m$。

下面给出引理 3.1，其在违约前情形下，求解 AAI 的最优再保险与投资策略中起着关键作用。

引理 3.1　方程 $\delta/\zeta - h^P j - (mh^P j\ln j)/\beta_4 = 0$ 有唯一正根 j^*。

证明　设 $F(j) = \delta/\zeta - h^P j - (mh^P j\ln j)/\beta_4$，则 $F'(j) = -h^P - mh^P(\ln j + 1)/\beta_4$，所以函数在区间 $\left(0, e^{-\frac{m+\beta_4}{m}}\right)$ 上是增函数，在 $\left(e^{-\frac{m+\beta_4}{m}}, +\infty\right)$ 上是减函数。且 $\lim_{j\to 0+}F(j) = \delta/\zeta > 0, \lim_{j\to+\infty}F(j) < 0$。因此方程有唯一正根 $j^* > 0$。证毕。

下面本文将给出在 $z = 0$ 违约前情况下，AAI 的最优再保险 — 投资策略结果。

定理 3.2　设模型满足以上假设条件，在 $z = 0$ 违约前情况下，模糊厌恶型保险公司最优再保险 — 投资策略为：

$$q^*(t) = \frac{a\eta}{b^2(m+\beta_3)e^{r_0(T-t)}},$$

$$\pi_1^*(t) = \frac{[2k_2 + (k_1 + k_2)(e^{k_2(T-t)} - 1)]m\xi + (m + \beta_1)(e^{k_2(T-t)} - 1)\sigma\rho_0 k_3}{[2k_2 + (k_1 + k_2)(e^{k_2(T-t)} - 1)](m + \beta_1)me^{r_0(T-t)}},$$

$$\pi_2^*(t) = \left[\ln\frac{1}{\Delta j^*} - \frac{\Delta m(j^* - 1)}{\beta_4}\right]\frac{e^{-\left(\frac{\delta}{\zeta}+r_0\right)(T-t)}}{m\zeta} + \frac{\Delta(j^* - 1)}{\beta_4\zeta e^{r_0(T-t)}},$$

其中,k_1,k_2,k_3 满足式(3.5),j^* 满足方程(3.9)。

证明 根据式(2.4)的指数效用函数以及边界条件,本文猜测在 $z = 0$ 的违约前情况下,值函数为如下形式:

$$J(t,x,v,0) = -\frac{1}{m}\exp\{-mxe^{r_0(T-t)} + A_1(t) + B_1(t)v\},$$

其中,$A_1(\cdot)$ 和 $B_1(\cdot)$ 都是关于 t 的函数,由边界条件 $J(T,x,v,0) = U(x)$,可以得到 $A(T) = 0$ 和 $B(T) = 0$,于是 $J(t,x,v,0)$ 对变量 t,x,v 求一阶、二阶偏导及混合偏导得:

$$J_t(t,x,v,0) = [r_0mxe^{r_0(T-t)} + A_1'(t) + B_1'(t)v]J(t,x,v,0),$$
$$J_v(t,x,v,0) = B_1(t)J(t,x,v,0),$$
$$J_x(t,x,v,0) = -me^{r_0(T-t)}J(t,x,v,0),$$
$$J_{vv}(t,x,v,0) = B_1^2(t)J(t,x,v,0),$$
$$J_{xx}(t,x,v,0) = m^2e^{2r_0(T-t)}J(t,x,v,0)$$
$$J_{xv}(t,x,v,0) = (-mB_1(t)e^{r_0(T-t)})J(t,x,v,0),$$

$$J(t,x - \pi_2\zeta,v,1) - J(t,x,v,0) = J(t,x,v,0)\left[\exp\left\{m\zeta\pi_2e^{r_0(T-t)} + \Big(A(t) - A_1(t)\Big) + \Big(B(t) - B_1(t)\Big)v\right\} - 1\right].$$

其中,$A_1'(t)$ 和 $B_1'(t)$ 是关于 t 的导数。则 $z = 0$ 时的 HJB 方程可化为:

$$\sup_{\pi\in\Pi}\inf_{f,g,h,j}\left\{\Big(rmxe^{r_0(T-t)} + A_1'(t) + B_1'(t)v\Big) - (a\lambda + a\eta q + xr_0 + \xi v\pi_1 + \pi_2\delta - bqf - \pi_1\sqrt{v}h)\right.$$
$$me^{r_0(T-t)} + [k(\theta - v) - \sigma\sqrt{v}\rho_0h - \sigma\sqrt{v}\rho g]B_1(t) + \frac{1}{2}m^2e^{2r_0(T-t)}(\pi_1^2v + b^2q^2) +$$
$$\frac{1}{2}\sigma^2vB_1^2(t) + \left[\exp\left\{m\zeta\pi_2e^{r_0(T-t)} + \Big(A(t) - A_1(t)\Big) + \Big(B(t) - B_1(t)\Big)v\right\} - 1\right]jh^P -$$
$$\left.\pi_1\sigma v\rho_0mB_1(t)e^{r_0(T-t)} - \left(\frac{mh^2}{2\beta_1} + \frac{mg^2}{2\beta_2} + \frac{mf^2}{2\beta_3}\right) + \frac{(j\ln j - j + 1)mh^P}{\beta_4}\right\} = 0. \tag{3.6}$$

下面求解最优控制,对式(3.6)大括号中函数求导,由一阶条件可得最优策略为:

$$\begin{cases} q^*(t) = \dfrac{a\eta - bf}{b^2me^{r_0(T-t)}}, \\ \pi_1^*(t) = \dfrac{\xi v + \sigma\rho_0vB_1(t) - \sqrt{v}h}{vme^{r_0(T-t)}}, \\ \pi_2^*(t) = \dfrac{\ln\dfrac{1}{\Delta j} + \Big(A_1(t) - A(t)\Big) + \Big(B_1(t) - B(t)\Big)v}{m\zeta e^{r_0(T-t)}}. \end{cases} \tag{3.7}$$

将式(3.7)带入式(3.6)中,再对式(3.6)大括号中函数求导,根据一阶条件,可得对于AAI保险公司满意时对应的最优参数为:

$$f^*(t) = \frac{a\eta\beta_3}{b(m + \beta_3)},\quad g^*(t) = \frac{-\sigma\sqrt{v}\rho B_1(t)\beta_2}{m},\quad h^*(t) = \frac{\beta_1\sqrt{v}\xi}{m + \beta_1}, \tag{3.8}$$

$$\frac{\delta}{\zeta} - h^Pj^* - \frac{mh^P}{\beta_4}j^*\ln j^* = 0. \tag{3.9}$$

由引理 3.1 可知,方程(3.9) 有唯一正根。将式(3.7) – (3.9) 代入式(3.6) 中,分离变量得:

$$\left[A_1'(t)-a\lambda me^{r_0(T-t)}-\frac{a^2\eta^2m}{2b^2(m+\beta_3)}+k\theta B_1(t)-\frac{\delta}{\zeta}\Big(A_1(t)-A(t)\Big)-\frac{\delta}{\zeta}\ln\frac{1}{\Delta j^*}+\frac{mh^P(j^*-1)}{\beta_4}\right]+$$
$$\left[B_1'(t)+\frac{\sigma^2\rho^2(m+\beta_2)}{2m}B_1^2(t)-\left(\xi\sigma\rho_0+k+\frac{\delta}{\zeta}\right)B_1(t)+\frac{\delta}{\zeta}B(t)-\frac{\xi^2m}{2(m+\beta_1)}\right]v=0.$$

于是有:

$$A_1'(t)-a\lambda me^{r_0(T-t)}-\frac{a^2\eta^2m}{2b^2(m+\beta_3)}+k\theta B_1(t)-\frac{\delta}{\zeta}\Big(A_1(t)-A(t)\Big)-\frac{\delta}{\zeta}\ln\frac{1}{\Delta j^*}+\frac{mh^P(j^*-1)}{\beta_4}=0,$$
$$B_1'(t)+\frac{\sigma^2\rho^2(m+\beta_2)}{2m}B_1^2(t)-\left(\xi\sigma\rho_0+k+\frac{\delta}{\zeta}\right)B_1(t)+\frac{\delta}{\zeta}B(t)-\frac{\xi^2m}{2(m+\beta_1)}=0,$$

根据边界条件 $A_1(T)=0$,$B_1(T)=0$。令 $G(t)=A_1(t)-A(t)$,则由一阶微分可得:

$$G'(t)=A_1'(t)-A'(t)=\frac{\delta}{\zeta}G(t)+\frac{\delta}{\zeta}\ln\frac{1}{\Delta j^*}-\frac{mh^P(j^*-1)}{\beta_4},$$

根据边界条件 $G(T)=A_1(T)-A(T)=0$,得到上式一阶微分方程的解为

$$G(t)=\left(\ln\frac{1}{\Delta j^*}-\frac{\Delta m(j^*-1)}{\beta_4}\right)e^{-\frac{\delta}{\zeta}(T-t)}-\ln\frac{1}{\Delta j^*}+\frac{\Delta m(j^*-1)}{\beta_4}.$$

根据文献 Zhu 等[17],非线性一阶 Riccati 微分方程解是唯一的。则可得:

$$A_1(t)=A(t)+G(t)=A(t)+\left(\ln\frac{1}{\Delta j^*}-\frac{\Delta m(j^*-1)}{\beta_4}\right)e^{-\frac{\delta}{\zeta}(T-t)}-\ln\frac{1}{\Delta j^*}+\frac{\Delta m(j^*-1)}{\beta_4},$$
$$B_1(t)=B(t)=\frac{e^{k_2(T-t)}-1}{2k_2+(k_1+k_2)(e^{k_2(T-t)}-1)}k_3.$$

其中,k_1,k_2,k_3 满足式(3.5)。

于是在 $z=0$ 的违约前情况下,模糊厌恶型保险公司的最优再保险 — 投资策略可得。证毕。

通过以上分别对违约前和违约后两种情况的讨论,对于更一般的情况,模糊厌恶型保险商的最优再保险 — 投资策略结论如下。

定理 3.3　设模型满足以上假设条件,且如果参数满足条件式(3.14) 和式(3.15)。则根据定理 3.1 和定理 3.2,本文可以得到模糊厌恶型保险公司基于 Heston's SV 模型下带违约风险的最优再保险 — 投资策略为:

$$\pi^*=\{q^*(t),\pi_1^*(t),\pi_2^*(t),t\in[0,T]\},$$

其中,

$$q^*(t)=\frac{a\eta}{b^2(m+\beta_3)e^{r_0(T-t)}},\tag{3.10}$$

$$\pi_1^*(t)=\frac{[2k_2+(k_1+k_2)(e^{k_2(T-t)}-1)]m\xi+(m+\beta_1)(e^{k_2(T-t)}-1)\sigma\rho_0k_3}{[2k_2+(k_1+k_2)(e^{k_2(T-t)}-1)](m+\beta_1)me^{r_0(T-t)}},\tag{3.11}$$

$$\pi_2^*(t)=\begin{cases}\left[\ln\dfrac{1}{\Delta j^*}-\dfrac{\Delta m(j^*-1)}{\beta_4}\right]\dfrac{e^{-\left(\frac{\delta}{\zeta}+r_0\right)(T-t)}}{m\zeta}+\dfrac{\Delta(j^*-1)}{\beta_4\zeta e^{r_0(T-t)}},t\in[0,\tau\wedge T),\\0,t\in[\tau\wedge T,T),\end{cases}\tag{3.12}$$

而与值函数 $J(t,x,v,z)$ 相关的 HJB 方程(3.1) 的解为:

$$\hat{J}(t,x,v,z)=(1-z)J(t,x,v,0)+zJ(t,x,v,1),\quad z=0\text{ 或 }z=1.\tag{3.13}$$

其中,$\varphi^*(t)=\Big(h^*(t),g^*(t),f^*(t),j^*(t)\Big)$ 满足式(3.8) 和(3.9)。k_1,k_2,k_3 满足式(3.5)。

此外,在极端情况下 $\Big(\phi_i(t)=0,i=1,2,3,4\Big)$,此时 $\varphi^*(t)=0$,模型的不确定性不影响最优策略。表示模糊厌恶型保险公司(AAI) 认为参考模型是真实的模型,因此在这种情况下 AAI 等同于模糊中性的保

险公司(Ambiguity Neutral Insurer,简称 ANI)。由定理 3.3 的式 $\pi_1^*(t)$ 可以看出随机波动率模型参数 ξ、ρ_0、k 和 θ 对最优投资策略有一定影响。从式 $\pi_2^*(t)$ 看出,在违约后的情况下,其最优策略值为 0,此时,若模糊厌恶参数 $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta$,模型的最优策略相当于退化到 Yi 等[28] 考虑的情况。因此,对比使用同一偏好参数的模型来看,本文的最优策略的表达式更精确,考虑的模型更符合实际金融环境。

虽然得到了最优策略,但是我们要保证对应于最优(最坏的情况)的参数 f^*、g^*、h^* 和 j^* 下,Radon-Nikodym 导数 $\Lambda(t)^*$ 是一个 P- 鞅,以确保 $\hat{P}^*$ 有定义。因此,类似 Yi 等[28],本文根据 Taksar 和 Zeng[36] 的定理 5.1 和 Novikov 条件给出了下面一个推论。

推论 3.4 若参数满足如下条件:

$$\frac{\beta_1^2\xi^2}{(m+\beta_1)^2}+\frac{\sigma^2\rho^2\beta_2^2N^2}{m^2}<\frac{k^2}{\sigma^2}. \tag{3.14}$$

其中,$N=k_3/(k_1+k_2)$。则关于 $\varphi^*(t)=\Big(h^*(t),g^*(t),f^*(t),j^*(t)\Big)$ 的 Novikov 条件成立。

证明 证明方法与 Yi 等[28] 的推论 4.1 的证明方法类似,把 $\varphi^*(t)$ 代入 Novikov 条件中,根据条件式(3.14)和 Taksar 和 Zeng[36] 的定理 5.1 可验证 Novikov 条件成立。详情请参阅文献 Yi 等[28]。
证毕。

下面本文将验证上述的最优策略(3.10)-(3.12)就是稳健性控制问题(2.6)的最优解,其 HJB 方程的解(3.13)就是相对应的值函数。

定理 3.5(验证定理) 对于稳健性控制问题(2.6),如果存在一个函数 $\hat{J}(t,x,v,z)$ 和控制策略 $\Big(\pi^*,\varphi^*(t)\Big)$ 满足 HJB 方程式(3.1),并且参数满足技术条件式(3.14)和

$$\begin{cases}32\sigma^2\rho_0^2N^2(m+\beta_1)^2+8\xi\sigma\rho_0N(m+\beta_1)[8-(m+\beta_1)]+\\ \qquad 32m^2\xi^2-8m\xi^2(m+\beta_1)\leqslant\dfrac{k^2(m+\beta_1)^2}{2\sigma^2},\\ 32m^2\xi^2-8m\xi^2(m+\beta_1)\leqslant\dfrac{k^2(m+\beta_1)^2}{2\sigma^2}.\end{cases} \tag{3.15}$$

那么,$\Big(\pi^*,\varphi^*(t)\Big)$ 是问题(2.6)的最优策略,$\hat{J}(t,x,v,z)$ 是相应的值函数。

证明 若要证明上述定理成立,根据文献 Kraft[37] 的推论 1.2,本文只需要证明 $\Big(\pi^*,\varphi^*(t)\Big)$ 和 $\hat{J}(t,x,v,z)$ 满足如下性质即可。

(1)π^* 是一个可容许策略;

(2)$E_{\hat{P}^*}(\sup_{t\in[0,T]}|\hat{J}(t,X^{\pi^*}(t),v,z)|^4)<\infty$;

(3)$E_{\hat{P}^*}(\sup_{t\in[0,T]}|\psi(t,X^{\pi^*}(t),\varphi^*(t),z)|^2)<\infty$。

此外,验证上述三条性质的方法与文献 Yi 等[28] 的性质 4.1 和 Sun[29] 的定理 5.1 的证明方法类似,其中技术条件式(3.15)保证了模型不会产生一个无限的值函数。证毕。

四、数值模拟

本节将给出数值例子进行模拟分析,以说明各个因素对保险公司的最优再保险—投资决策的影响,其中,本文采用 Yi 等[28] 和 Sun 等[29] 中的参数设置。为方便数值模拟,除另有说明外,基本参数设置如表1。

表1　基本参数表

参数	m	σ	β_1	β_2	β_3	β_4	ρ_0	T	t	k
取值	1.1	0.15	1	2	2	2	0.4	4	0	4
参数	ξ	δ	ζ	Δ	h^P	h^Q	b	η	a	r_0
取值	3	0.2	0.4	0.25	0.125	0.5	1	0.4	4	0.4

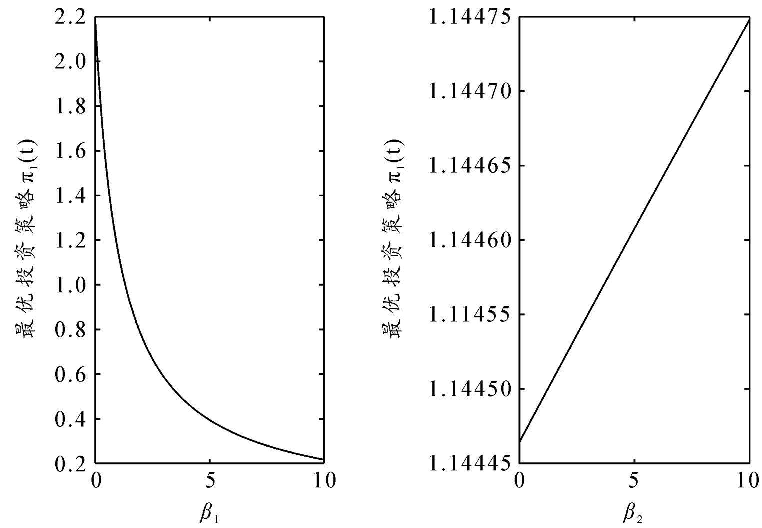

图1　参数 β_1 和 β_2 对最优投资策略 $\pi_1(t)$ 的影响

图1分别表示了模糊厌恶参数 β_1 和 β_2 单独对最优风险资产投资策略的影响。由图可知,最优投资(3.11)是关于 β_1 的递减函数,说明随着 AAI 对风险资产的态度越来越厌恶,其投资在风险资产上的金额必定会相应地减少,这也意味着投资商的投资选择将趋于保守。其次,随着 β_2 的增长,最优风险资产投资策略 $\pi_1(t)$ 的增长很缓慢,这是因为其对风险资产的价格波动只是一种很微弱的影响。

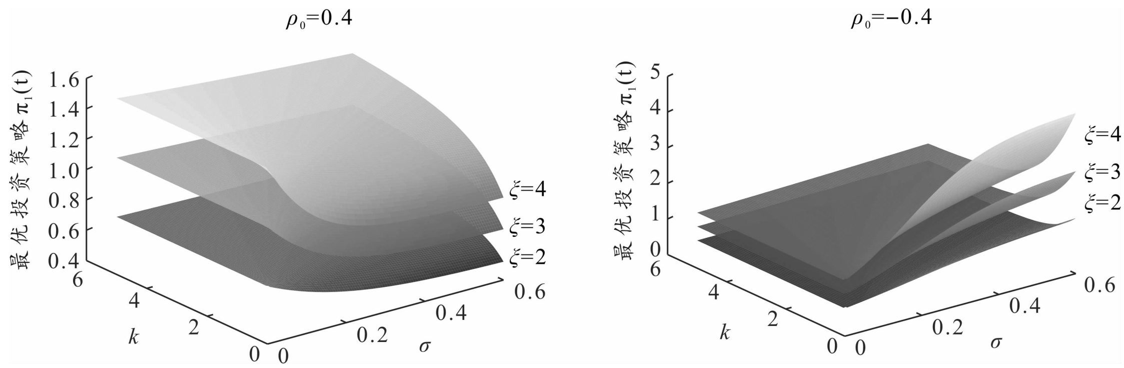

图2　当 ρ_0 分别等于0.4和 −0.4时,ξ、σ 和 k 对最优投资策略 $\pi_1(t)$ 的影响

图2分别表示当 $\rho_0=0.4$ 和 $\rho_0=-0.4$ 时,Heston's SV 模型的参数 ξ 和 σ 对最优风险资产投资策略(3.11)的影响,比较图2的左图和右图可知,随着风险溢价 ξ 增大,AAI 对风险资产的投资就越高,说明风险溢价和风险资产产生的收益是正相关的,ξ 越大代表风险资产的平均回报率相对越高,那么投资者就会加大对风险资产的投资金额。而从左图可以看出,当 $\rho_0>0$ 时,那么风险资产价格过程和它的波动过程是正相关的,即在相同方向上变化,所以随着波动过程 $V(t)$ 的波动率 σ 的增大,就会增强风险资产的波动性,投资风险资产的风险就越大,那么 AAI 就会减少对风险资产的投资。而对于波动过程 $V(t)$ 的均值回归率 k 而言,高风险意味着高收益,但影响程度有限。所以随着 k 的增加,投资风险资产的金额趋于平稳。相反,从右图可以看出,当 $\rho_0<0$ 时,那么风险资产价格过程和它的波动过程是负相关的,即在相反方向上变化,所以

随着波动过程 $V(t)$ 的波动率 σ 的增大,就会抵消风险资产的波动性,投资风险资产的风险就越小,那么 AAI 就会增大对风险资产的投资。而均值回归率 k 对于最优投资策略的影响也与左图的相反。

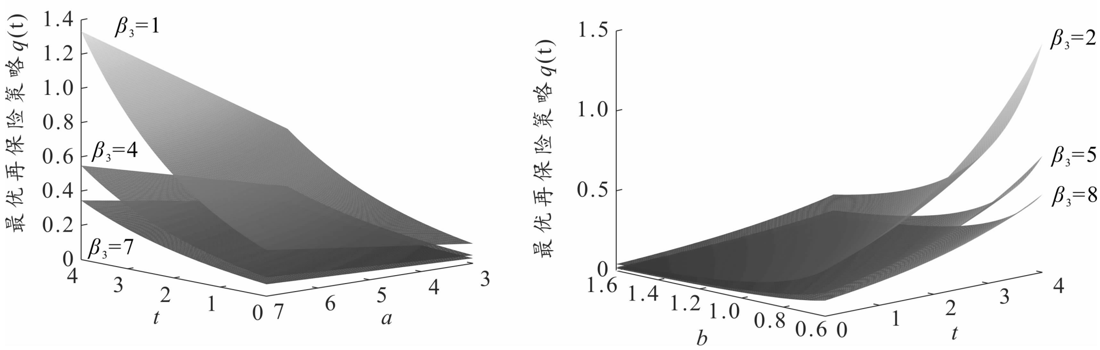

图3　参数 a,b 和 β_3 对最优再保险策略 $q(t)$ 的影响

图3表示参数 a,b 和 β_3 对最优再保险策略(3.10)的影响。由左图可知,最优再保险策略(3.10)随着模糊厌恶系数 β_3 的增加而减小,这意味着随着 AAI 对不确定索赔的态度越来越厌恶,其保险公司在保险市场的风险暴露就越小。这就说明原保险公司为了降低自身的风险,会加大再保险比例。这也符合 AAI 模糊厌恶系数 β_3 越大,其将采取保守的策略以降低自身的索赔比例的事实。此外,随着索赔过程中漂移参数 a 的增大,最优再保险(3.10)的值就也越大,这意味着出现巨灾风险的可能性增大时,保险公司将会加大再保险比例以分散风险。由右图可知,随着索赔过程中扩散参数 b 值的增加,其最优再保险(3.10)的值在减少,这与随着巨灾风险发生概率的增大,其保险公司为了规避风险而加大再保险比例的事实相吻合。

图4表示含糊厌恶参数 β_4 对最优可违约债券投资策略 $\pi_2(t)$ 的影响。其中 β_4 为 AAI 对可违约债券跳跃风险的含糊厌恶参数。从图中可以清晰看到随着 β_4 的增大,最优可违约债券投资策略 $\pi_2(t)$ 的值一直在递减。这与 AAI 规避风险的投资方式这一事实相符。

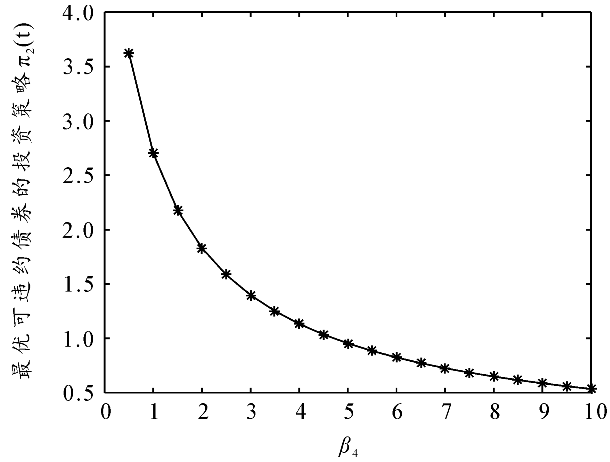

图4　参数 β_4 对最优投资策略 $\pi_2(t)$ 的影响

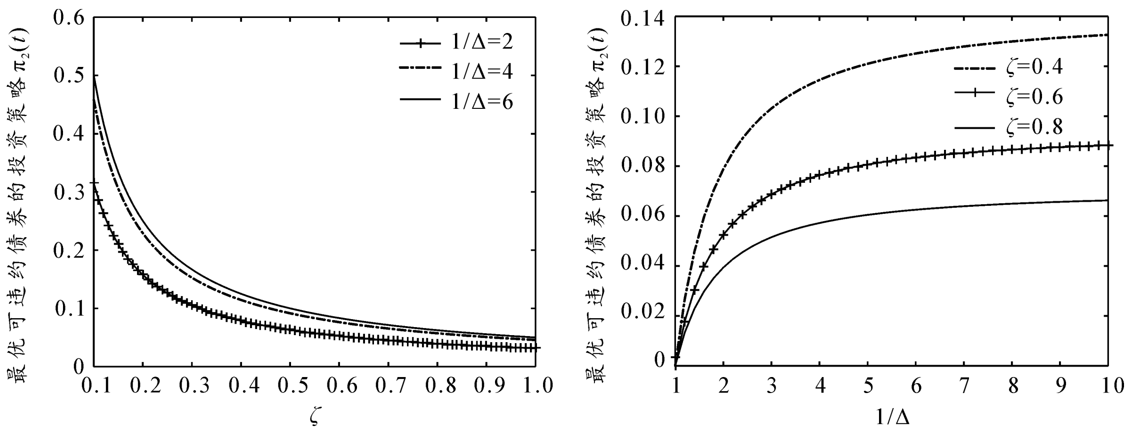

图5　参数 ζ 和 $1/\Delta$ 对最优投资策略 $\pi_2(t)$ 的影响

图5表示参数 ζ 和$1/\Delta$ 对最优投资策略 $\pi_2(t)$的影响趋势图。比较两图可以看出随着可违约债券的风险溢价$1/\Delta$ 的增大,其最优投资策略 $\pi_2(t)$不断增大并趋于平缓。这是因为高违约风险溢价会导致高的潜在收益率,所以当违约风险溢价上升时,保险公司会把更多的资金投资于该可违约债券,但投资额的变化率会快速下降并趋于零,这正和效用递减的规律相符合。

五、结论与展望

本文考虑了模糊厌恶型保险公司在可违约金融市场中的稳健最优再保险—投资策略问题。其风险资产价格服从 Heston’s SV 模型,利用 Girsanov 变换得到模糊厌恶型保险公司的等价财富方程,以终端财富期望指数效用最大化为目标,建立其相应的 HJB 方程。并分别在违约前和违约后情况下,求解 HJB 方程,获得了最优再保险—投资策略。最后,数值模拟出了各参数对最优再保险—投资策略的影响。结果显示模型的模糊度对 AAI 的最优再保险—投资策略影响非常明显,随着模糊厌恶型保险公司的总体风险厌恶度增加,AAI 对于不确定风险投资更趋于保守,这将大大削减其在再保险—投资市场中的风险暴露。而数值模拟也可以发现,刻画风险资产价格的随机波动率对保险公司的最优投资策略有很复杂的影响,但影响程度有限。此外,相比较使用同一偏好参数的模型结果来看,本文的最优策略的表达式更精确,考虑的模型更符合实际金融环境。最后,关于进一步的研究工作可以从以下两个方面深入探讨:第一,可以在风险资产投资过程中考虑加入期权,丰富投资种类,也可以加入税收和交易费用;第二,可以在通胀情况下,考虑 Heston’s SV 模型下带有违约风险的最优再保险—投资策略,使得模型更加贴合实际金融环境。

参考文献:

[1]BROWNE S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin[J]. Mathematics of Operations Research,1995,20(4):937-958.

[2]YANG H,ZHANG L. Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2005,37(3):615-634.

[3]WANG N. Optimal investment for an insurer with exponential utility preference[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2007,40(1):77-84.

[4]SCHMIDLI H. Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting[J]. Scandinavian Actuarial Journal,2001(1):55-68.

[5]CHEN S, LI Z, LI K. Optimal investment-reinsurance policy for an insurance company with VAR constraint[J]. Insurance: Mathematics and Economics,2010,47(2):144-153.

[6]BI X,ZHANG S. Minimizing the risk of absolute ruin under a diffusion approximation model with reinsurance and investment[J]. Journal of Systems Science and Complexity,2015,28(1):144-155.

[7]BÄUERLE N. Benchmark and mean-variance problems for insurers[J]. Mathematical Methods of Operations Research,2005,62(1):159-165.

[8]ZENG Y,LI Z,LIU J. Optimal strategies of benchmark and mean-variance portfolio selection problems for insurers[J]. Journal of Industrial and Management Optimization,2010,6(3):483-496.

[9]夏登峰,费为银,梁勇. 带含糊厌恶的股东价值最大化[J]. 中国科学技术大学学报,2010(9):43-47.

[10]刘晓,陈振龙. 带注资的经典风险模型中征税问题[J]. 系统科学与数学,2015(2):206-213.

[11]HESTON S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. The Review of Financial Studies,1993,6(2):327-343.

[12]KRAFT H. Optimal portfolios and Heston’s stochastic volatility model: an explicit solution for power utility[J]. Quantitative Finance,2005,5(3):303-313.

[13]LIU J. Portfolio selection in stochastic environments[J]. Review of Financial Studies,2007,20(1):1-39.

[14]LI Z,ZENG Y,LAI Y. Optimal time-consistent investment and reinsurance strategies for insurers under Heston’s SV model[J]. Insurance: Mathematics and Economics,2012,51(1):191-203.

[15] HUANG Y, YANG X, ZHOU J. Robust optimal investment and reinsurance problem for a general insurance company under Heston model[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2017, 85(2): 305-326.

[16] BIELECKI T, JANG I. Portfolio optimization with a defaultable security[J]. Asia-Pacific Financial Markets, 2006, 13(2): 113-127.

[17] ZHU H, DENG C, YUE S, et al. Optimal reinsurance and investment problem for an insurer with counterparty risk[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2015, 61(2): 242-254.

[18] MA J, WANG G, YUAN G. Optimal reinsurance and investment problem in a defaultable market[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2018, 47(7): 1597-1614.

[19] ZHAO H, SHEN Y, ZENG Y. Time-consistent investment-reinsurance strategy for mean-variance insurers with a defaultable security[J]. Journal of Mathematical Analysisand Applications, 2016, 437(2): 1036-1057.

[20] ZHANG Q, CHEN P. Time-consistent mean-variance proportional reinsurance and investment problem in a defaultable market[J]. Optimization, 2018, 67(5): 683-699.

[21] LI B, GENG C. Time-consistent investment and reinsurance problems for mean-variance insurers with default risk under variance premium principle[J]. Mathematica Applicata, 2019, 32(3): 532-543.

[22] 张永涛, 赵慧, 荣喜民. 考虑违约风险的兼顾保险公司与再保险公司利益的最优投资与再保险问题研究[J]. 系统工程理论与实践, 2020(7): 1721-1734.

[23] ANDERSON E, HANSEN L, SARGENT T. Robustness, detection and the price of risk[J/OL]. Working Paper, Chicago: University of Chicago, 1999: 1-52 [2020-04-01]. http://www.researchgate.net/publication/2637084.

[24] UPPAL R, WANG T. Model misspecification and underdiversification[J]. The Journal of Finance, 2003, 58(6): 2465-2486.

[25] MAENHOUT P. Robust portfolio rules and asset pricing[J]. Review of Financial Studies, 2004, 17(4): 951-983.

[26] MAENHOUT P. Robust portfolio rules and detection-error probabilities for a mean-reverting risk premium[J]. Journal of Economic Theory, 2006, 128(1): 136-163.

[27] FLOR C, LARSEN L. Robust portfolio choice with stochastic interest rates[J]. Annals of Finance, 2014, 10(2): 243-265.

[28] YI B, LI Z, VIENS F, et al. Robust optimal control for an insurer with reinsurance and investment under Heston's stochastic volatility model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2013, 53(3): 601-614.

[29] SUN Z, ZHENG X, ZHANG X. Robust optimal investment and reinsurance of an insurer under variance premium principle and default risk[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 446(2): 1666-1686.

[30] FEI W. Optimal consumption and portfolio choice with ambiguity and anticipation[J]. Information Sciences, 2007, 177(23): 5178-5190.

[31] ZHANG X, SIU T. Optimal investment and reinsurance of an insurer with model uncertainty[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 45(1): 81-88.

[32] OU H, HUANG Y, YANG X, et al. Robust optimal portfolio and reinsurance for an insurer under inflation risk[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2016, 32(1): 89-100.

[33] ZHENG X, ZHOU J, SUN Z. Robust optimal portfolio and proportional reinsurance for an insurer under a CEV model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2016, 67: 77-87.

[34] 刘兵, 周明. 模糊厌恶下的最优投资与最优保费策略[J]. 系统工程理论与实践, 2020(7): 1707-1720.

[35] KARATZAS I, SHREVE S. Brownian motion and stochastic calculus[M]. New York: Springer, 1988: 190-198.

[36] TAKSAR M I, ZENG X D. A general stochastic volatility model and optimal portfolio with explicit solutions[J/OL]. Working Paper, Columbia: University of Missouri, 2009: 1-17 [2020-04-01]. http://www.math.missouri.edu/~zeng/pub/ageneral.pdf.

[37] KRAFT H. Optimal portfolios with stochastic interest rates and defaultable assets[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004: 15-17.

（责任编辑　郭宝才）